Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Неопределенность знаний и способы их обработки

Методическое указание к практическим работам по дисциплине «Системы искусственного интеллекта» для студентов направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

очной и заочной форм обучения

Энгельс 2025

1 Виды неопределенности описания задачи

При формировании задачи происходит отображение реальной задачи на некоторый формальный язык, а в общем случае — на профессиональный язык ЛПР, который представляет модель реального объекта.

Пусть $O_З$ — множество объектов отображаемой задачи, под которыми понимаются ее элементы и их взаимосвязи;

$O_Я$ — множество объектов языка (понятия, отношения, имена и т. д.).

Рассмотрим следующие отображения $\Phi: O_З \to O_Я$. В случае, когда отображение Φ устанавливает взаимно однозначное соответствие элементов множеств $O_З$ и $O_Я$, имеет место задача в условиях определенности. Пусть $O_1 \in O_З, O_2 \in O_Я$ и выполняются хотя бы одно из условий

$$(\exists O_1)\,|\Phi(O_1)| > 1; \qquad (\exists O_2)\,\left|\Phi^{-1}(O_2)\right| > 1;$$
$$(\exists O_1)\Phi(O_1) = \varnothing; \qquad (\exists O_2)\Phi^{-1}(O_2) = \varnothing,$$

где $|X|$ — мощность множества X; $\varnothing$ — пустое множество.

Тогда имеем задачу в условиях неопределенности и соответственно явления синонимии, полисемии, недостаточности или избыточности языка описания. Наиболее важные для задачи виды неопределенности описания можно представить с помощью дерева (рис. 1).

Первый уровень данного дерева образован терминами, качественно характеризующими количество отсутствующей информации об элементах задачи. Подчеркнем, что расстановка терминов на дереве условна. Здесь более существенна структура.

В ситуации неизвестности информация о задаче практически отсутствует (начальная стадия изучения задачи). В процессе сбора информации на определенном этапе может оказаться, что:

- собрана еще не вся возможная (неполнота) или не вся необходимая (недостаточность) информация;
- для некоторых элементов определены не их точные описания, а лишь множества, которым эти описания принадлежат (недоопределенность);
- ряд элементов задачи временно описан лишь по аналогии с уже решавшимися задачами, имеется лишь «замещающее» описание (неадекватность).

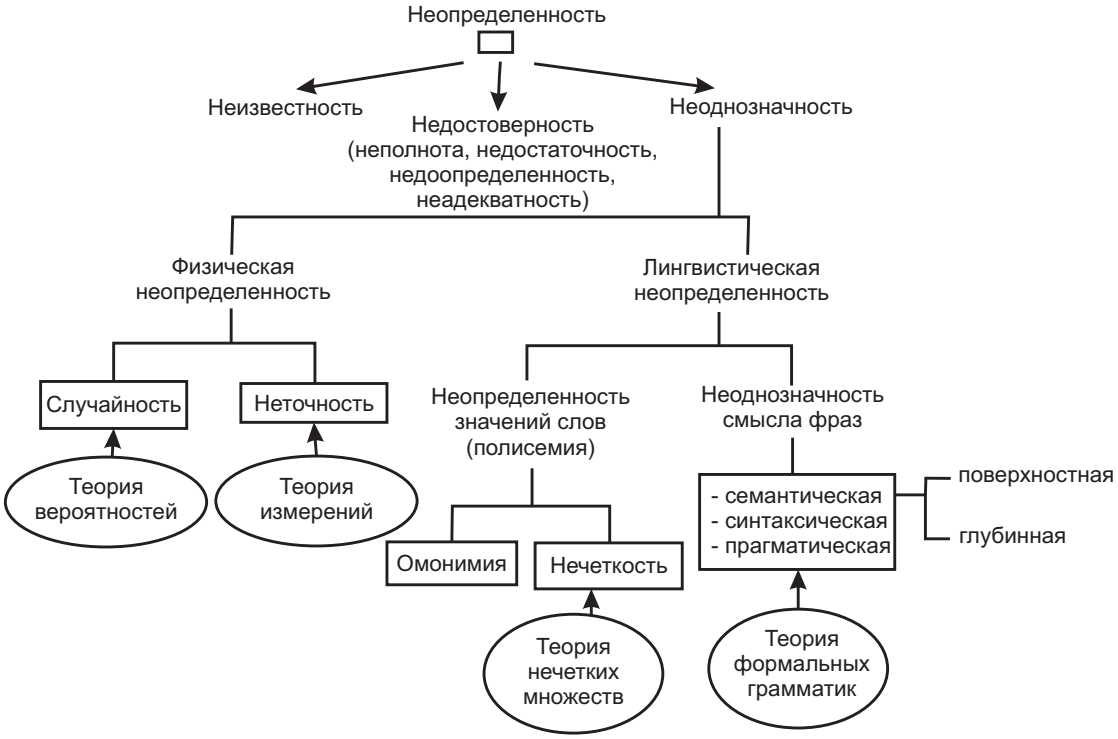

Рис. 1 – Неопределенность описания задач.

Важно, что наличие данных видов неопределенности (недостоверности) связанно либо с тем, что процесс сбора информации временно приостановлен, либо с нехваткой ресурсов, выделенных для сбора информации.

Дальнейшее изучение может привести либо к ситуации определенности, в которой все элементы описаны однозначно (классический пример — транспортная задача линейного программирования), либо к ситуации неоднозначности. Для последней предполагается, что вся возможная информация о задаче собрана, но полностью определенное описание не получено и не может быть получено. Второй уровень дерева описывает источники (причины) возможной неоднозначности описания, которыми являются внешняя среда (физическая неопределенность) и используемый ЛПР профессиональный язык (лингвистическая неопределенность).

. . . . . .

Физическая неопределенность описывает неопределенность объектов реального мира с точки зрения наблюдателя. Так, неточность связанна с возможностями измерительного оборудования, т. е. с неточностью измерений вполне определенной величины, выполняемых физическими приборами. С объектами, измеряемыми в различных шкалах, мы должны работать по-разному. Например, для ранговых или номинальных шкал арифметические операции (включая вычисление средних значений) не имеют смысла. Изучение подобных вопросов составляет предмет исследования теории измерений.

. . . . . .

Физическая неопределенность может быть связанна и с наличием во внешней среде нескольких возможностей, каждая из которых случайным образом становится действительностью (ситуация случайности, или стохастической неопределенности).

Теория вероятностей представляет, пожалуй, наиболее развитую теорию, ориентированную на обработку неопределенности. Однако эта теория базируется на ряде предположений и гипотез, без проверки которых для данной конкретной проблемы мы не можем гарантировать адекватность выводов, полученных в рамках анализа модели, реальным объектам или процессам. Примерами таких требований могут быть:

- повторяемость событий;
- гарантии того, что наблюдаемые эффекты могут быть перенесены на все объекты или события данного типа (генеральную совокупность);
- независимость событий и т. д.

. . . . . .

Лингвистическая неопределенность связанна с использованием естественного языка (в частом случае — профессионального языка ЛПР) для описания задачи. Эта неопределенность обуславливается необходимостью оперировать конечным числом слов и ограниченным числом структур фраз (предложений, абзацев, текстов) для описания за конечное время бесконечного множества разнообразных ситуаций, возникающих в процессе принятия решений.

. . . . . .

Лингвистическая неопределенность порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий и отношений) языка, которую условно назовем полисемией, а с другой стороны, неоднозначностью смысла фраз.

Для наших целей достаточно выделить два вида полисемии: омонимию и нечеткость. Если отображаемые одним и тем же словом объекты задач существенно различны то соответствующую ситуацию отнесем к омонимии. Например: коса — вид побережья, сельскохозяйственный инструмент, вид прически. Если же эти объекты сходны, то ситуацию отнесем к нечеткости. Например, небольшой запас горючего

на складе, множество чисел, значительно больше ста. Теория нечетких множеств есть некоторый аппарат формализации одного из видов неопределенности, возникающей при моделировании (в широком смысле этого слова, не только математическом) реальных объектов. Нечеткость возникает всегда, когда мы используем слова естественного языка для описания объекта. Последнее возникает всегда, когда мы пытаемся применять информационные технологии в «нетрадиционных» или «гуманитарных» областях, таких, как медицина, экономика, управление, социология и др. В рамках теории нечетких множеств разработан аппарат формализации содержательно значимых понятий. Примеры: высокий уровень безопасности, устойчивая ситуация, нормальная температура и т. д.

Рассматривая источники неоднозначности смысла фраз, можно выделить синтаксическую, семантическую и прагматическую неоднозначности. В первом случае уточнение синтаксиса позволяет понять смысл фразы. Пример: «казнить, нельзя помиловать — казнить нельзя, помиловать»; во втором случае при поверхностной семантической неопределенности смысла фраз отдельные слова понятны, но не ясен смысл фразы. Пример: «голубые зеленые мысли яростно спят», при неоднозначности глубинной структуры (семантической неопределенности) не понятны и все отдельные слова или существует два или несколько прочтений. Пример: «глокая куздра штеко будланула бокра и курчатит бокренка» или «Шалтай-болтай свалился во сне». В последнем предложении два прочтения: или Шалтай-болтай действительно свалился во время сна, или же персонажу сказки приснилось, что он свалился; в третьем случае прагматическая неоднозначность проявляется (связывается) с неправильным использованием местоимений или каких-либо других отсылочных слов. Например: «Он ударил палкой по табуретке и сломал ее». Таким образом, возникает подмена понятия — сломал табуретку, а не палку.

Таким образом, прагматическая неопределенность связанна с неоднозначностью использования синтаксических и семантических понятий информации для достижения целей деятельности. Возникающие при понимании текстов проблемы детально анализируются в [6–11]. Итак, неопределенность смысла фраз исследуются теорией формальных грамматик.

Заканчивая рассмотрение видов неопределенности, необходимо отметить, что данные виды неопределенности могут накладываться друг на друга. Например, учет физической неопределенности может усложниться появлением лингвистической неопределенности в описании вероятностного распределения.

2 Особенности данных и знаний

При представлении знаний в БЗ различают, как правило, свойства данных и знаний по содержанию и истинности информации. Обычно знания в интеллектуальных системах неполны, противоречивы, немонотонны, неточны, неопределенны и нечетки. Остановимся на этих особенностях знаний [1].

Полнота обычно формулируется следующим образом: для множества формул с заданными свойствами исходная система аксиом и правил вывода должна обеспечить вывод всех формул, входящих в это множество.

Неполнота информации, которую приходится использовать, например, в экспертных системах машинного обучения, требует специальных подходов, отлич-

ных от методов классической логики. Это могут быть методы статистики, методы нечеткой логики, основанные на нечетких множествах Л. Заде, теория приближенных множеств (rough sets theory), предложенная в начале 80-х годов математиком Павлаком как новое средство работы с нечеткостями. Главное преимущество этой теории в том, что она не требует никакой предварительной или дополнительной информации о данных (информации о вероятностях или о степени принадлежности элемента множеству). Эта теория может быть использована для решения задач извлечения знаний из баз данных.

Непротиворечивость — свойство, которое сводится к тому, что исходная система аксиом и правил вывода не должна давать возможность выводить формулы, не принадлежащие заданному множеству формул с выбранными свойствами. Например, полные системы аксиом и правил вывода в классическом исчислении предикатов первого порядка позволяют получать любую общезначимую формулу из множества общезначимых формул и не дают возможности получить какие-либо формулы, не обладающие этим свойством. Однако на практике мы имеем дело со слабоформализованными данными и, следовательно, трудностями формулировки формул и ответов на запросы в вопрос-ответных системах. В отличие от простого добавления информации, как в базе данных, при добавлении новых знаний возникает опасность получения противоречивых выводов, т. е. выводы, полученные с использованием новых знаний, могут опровергать те, что были получены ранее. Еще хуже, если новые знания будут находиться в противоречии со старыми. Почти все экспертные системы первого поколения были основаны на модели закрытого мира с применением аппарата формальной логики. Модель закрытого мира предполагает заполнение БЗ только истинными понятиями, а остальные считаются ложными. Эта модель работает, на ней базируется язык PROLOG, но она должна быть полной, и выводы должны быть монотонными.

Монотонность — свойство логических выводов. Для полного набора знаний справедливость полученных выводов не нарушается с добавлением новых фактов, т. е. если $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_1$, то $A_1, A_2, \ldots, A_n, \{F\} \vdash B_1$, где $\{F\}$ — множество добавочных утверждений не отменяет ранее выведенного утверждения B_1.

В качестве средств формальной обработки неполных знаний, для которых необходимы немонотонные выводы, разрабатываются методы немонотонной логики: немонотонная логика Макдермотта и Доула, в которой вводятся условные логические операции, логика умолчания о замкнутости мира Рейтера, немонотонная логика Маккарти и т. д.

Неточность — относится к содержанию информации (или значению сущности) и наряду с неполнотой и противоречивостью должна обязательно учитываться при представлении знаний в БЗ. Возникновение неточных знаний связанно:

- с ошибками в данных;
- ошибками в правилах вывода;
- использованием неточных моделей.

Неточная информация может быть как непротиворечивой, так и противоречивой. Так, например, возраст студента Иванова, записанный в БЗ, равен 32 годам, хотя ему на самом деле 23. Этот пример непротиворечивой, хотя и не точной информации. Может быть и другая ситуация, когда по ошибке в БЗ ему записали

123 года, что противоречит действительности, так как возраст людей, как правило, колеблется от 0 до 100 лет.

К неточности будем относить также величины, значения которых могут быть получены с ограниченной точностью, не превышающей некоторый порог, определенный природой соответствующих параметров. Очевидно, что практически все реальные оценки являются неточными и сама оценка неточности также является неточной. Примеры неточности данных встречаются при измерении физических величин. В зависимости от степени точности измерительного прибора, от психологического состояния и здоровья человека, производящего измерения, получаемое значение величины колеблется в некотором интервале. Поэтому для представления неточности данных мы можем использовать интервал значений вместе с оценкой точности в качестве меры доверия к каждому значению.

Основной подход, связанный с теорией приближенных множеств, основан на идее классификации. Эта теория помогает решить проблему неточных знаний. Неточные знания или понятия могут быть определенны приближенно в рамках заданного обучающего множества, если использовать понятия верхнего и нижнего приближений и меры точности аппроксимации.

Разработаны алгоритм RS1 и модифицированный RS2 построения продукционных правил, основанные на теории приближенных множеств и обработки объектов с неопределенностью и различными степенями важности в информационной системе. Последний алгоритм позволяет обрабатывать информацию с неопределенностью двух видов: когда отсутствуют значения некоторых атрибутов у объектов и когда объекты представлены с некоторой степенью уверенности.

Неопределенность относится не к содержанию информации, а к ее истинности, понимаемой в смысле соответствия реальной действительности (степени уверенности знания). Иногда в литературе вводится термин «ненадежные знания», который определяется таким образом, что знание не может быть истинным или ложным, т. е. 0 или 1. Каждый факт реального мира связан с определенностью информации, которая указывает на степень этой уверенности.

Для понятий «определенность» и «уверенность» чаще всего используются количественные меры. Основная идея такой меры заключается во введении функции неопределенности $unc(p)$, понимаемой как определенность того, что высказывание p, содержащееся в БЗ, истинно, т. е. говорят, что утверждение p более определено, чем q, если $unc(p) \geqslant unc(q)$.

Традиционным подходом для представления неопределенности является теория Г. Шейфера, которая дает возможность с единых позиций подойти к вопросам формального представления неопределенности в математических моделях и тем самым приобретает большое значение как в фундаментальном, так и прикладном аспектах. Эта теория еще нуждается в глубокой проработке вопросов ее практического применения, тогда как теория возможностей и тем более теория вероятностей используются в инженерной практике.

Байесовский метод. При байесовском подходе степень достоверности каждого из фактов базы знаний оценивается вероятностью, которая принимает значения от нуля до единицы. Вероятности исходных фактов определяются либо методом статистических испытаний, либо опросом экспертов. Вероятность заключения определяют на основе правила Байеса для вычисления апостериорной условной

вероятности $\mathsf{P}(H|E)$ события (гипотезы) H при условии, что произошло событие (свидетельство) E [3]

$$\mathsf{P}(H|E) = \frac{\mathsf{P}(E,H)}{\mathsf{P}(E)},$$

где $\mathsf{P}(E)$ — безусловная (априорная) вероятность свидетельства E;

$\mathsf{P}(E,H)$ — совместная вероятность свидетельства E и гипотезы H.

Совместная вероятность $\mathsf{P}(E,H)$ равна произведению безусловной вероятности гипотезы $\mathsf{P}(H)$ на условную вероятность того, что свидетельство (факт) E имеет место, если наблюдается гипотеза H:

$$\mathsf{P}(E,H) = \mathsf{P}(H) \cdot \mathsf{P}(E|H).$$

Отсюда следует, что апостериорную вероятность $\mathsf{P}(H,E)$ можно вычислить с помощью формулы

$$\mathsf{P}(H|E) = \frac{\mathsf{P}(H) \cdot \mathsf{P}(E|H)}{\mathsf{P}(E)}. \tag{1}$$

Уточним практическое применение формулы (4.1) на простом примере. Пусть H обозначает некоторое заболевание, а E — симптом. Тогда априорная вероятность заболевания H может быть определена по формуле $\mathsf{P}(H) = N_H/N$, где N_H — количество жителей некоторого региона, имеющих заболевание H; N — количество всех жителей региона. Вероятность $\mathsf{P}(E)$ определяется аналогично $\mathsf{P}(E) = N_E/N$, где N_E — количество жителей, у которых наблюдается симптом E. Обычно значения вероятностей $\mathsf{P}(H)$ и $\mathsf{P}(E)$ выясняют у экспертов.

Вероятность $\mathsf{P}(E|H)$ соответствует наличию симптома E у больного с заболеванием H. Ее значение также определяется методом опроса экспертов.

Формула (4.1) справедлива для случая одного свидетельства E и одной гипотезы H. Она позволяет пересчитать значение вероятности гипотезы H в том случае, когда обнаружено свидетельство E в ее пользу, т. е. получать на основе априорной вероятности $\mathsf{P}(H)$ значение $\mathsf{P}(H|E)$ апостериорной вероятности. Если рассматривается полная группа несовместимых гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с априорными вероятностями $\mathsf{P}(H_1), \mathsf{P}(H_2), \ldots, \mathsf{P}(H_n)$, то апостериорную вероятность каждой из гипотез при реализации свидетельства E вычисляют с помощью формулы

$$\mathsf{P}(H_i|E) = \frac{\mathsf{P}(E|H_i) \cdot \mathsf{P}(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(E|H_k) \cdot \mathsf{P}(H_k)}, \tag{2}$$

которую называют теоремой гипотез Байеса.

Формула (4.2) позволяет упростить вычисление гипотезы H при реализации свидетельства E. Так, если рассматривать две несовместимые гипотезы H и $\sim H$ («не H», $\neg H$, $\bar{H}$), то

$$\mathsf{P}(H|E) = \frac{\mathsf{P}(E|H) \cdot \mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(E|H) \cdot \mathsf{P}(H) + \mathsf{P}(E| \sim H) \cdot \big(1 - \mathsf{P}(H)\big)}, \tag{3}$$

где $\mathsf{P}(E| \sim H)$ — вероятность свидетельства E при условии, что гипотеза H не наблюдается;

$1 - \mathsf{P}(H) = \mathsf{P}(\sim H)$ — априорная вероятность невыполнения гипотезы H. В формуле (4.3), в отличие от (4.1) , отсутствует априорная вероятность $\mathsf{P}(E)$, которая неудобна с точки зрения экспертной оценки.

Введем в рассмотрение отношение

$$D_E = \frac{\mathsf{P}(E|H)}{\mathsf{P}(E| \sim H)},$$

которые называют *отношением правдоподобия*. Оно характеризует отношение вероятности получения свидетельства E при условии, что гипотеза H верна, к вероятности получения этого же свидетельства при условии, что гипотеза H не верна. Поделив числитель и знаменатель (4.3) на $\mathsf{P}(E| \sim H)$, получим:

$$\frac{\mathsf{P}(H|E)}{1 - \mathsf{P}(H|E)} = D_E \frac{\mathsf{P}(H)}{1 - \mathsf{P}(H)}. \tag{4}$$

Отношения, записанные в выражении, называются шансами. Шансы — это иная шкала для представления вероятности. Так отношение

$$O(H) = \frac{\mathsf{P}(H)}{1 - \mathsf{P}(H)}$$

представляет априорные шансы в пользу гипотезы H, а

$$O(H|E) = \frac{(H|E)}{\left(1 - \mathsf{P}(H|E)\right)} —$$

апостериорные шансы. Например, если $\mathsf{P}(H) = 0.3$, то $O(H) = 3/7$ т. е. три случая «за» и семь «против».

Из (4.4) следует, что

$$O(H|E) = D_E \cdot O(H) \tag{5}$$

Таким образом, апостериорные шансы очень просто вычисляются через априорные шансы. Для этого необходимо знать отношение правдоподобия свидетельства E. Считается, что использование шансов в соответствии с формулой (4.5) для оценки правдоподобности гипотез проще, чем непосредственное вычисление вероятностей по формуле (4.4). Это объясняется следующим образом:

- для многих пользователей использование шкалы шансов выглядит проще;
- шансы обозначают целыми числами, а их проще вводить при ответах на вопросы системы.

Отметим, что можно получить формулу, симметричную (4.5), позволяющую вычислять апостериорные шансы в пользу гипотезы H, если заданно, что E заведомо ложно.

$$O(H| \sim E) = N_E \cdot O(H),$$

где N_E — отношение правдоподобия

$$\frac{\mathsf{P}(\sim E|H)}{\mathsf{P}(\sim E| \sim H)}$$

Следовательно, шансы в пользу некоторой гипотезы H можно вычислять, опираясь либо на истинность свидетельства E, либо на его ложность. Такой подход используется в экспертной системе PROSPECTOR, применяемой в геологии. При этом отношение правдоподобия D_E и N_E называют соответственно фактором достаточности и фактором необходимости. Факторы D_E и N_E связанны друг с другом простым соотношением

$$N_E = \frac{1 - D_E \cdot \mathsf{P}(E|H)}{1 - \mathsf{P}(E| \sim H)},$$

которое позволяет установить диапазон изменения их значений.

Можно показать, что значения D_E принадлежат диапазону $[1, \infty)$, а значения N_E — диапазону $[0, 1]$. С каждым правилом в системе PROSPECTOR связывают факторы D_E и N_E, значения которым могут назначаться независимо. Это иногда приводит к противоречиям. Чтобы разрешить такие противоречия, фактор D_E используется, когда свидетельство E истинно, а фактор N_E — когда ложно.

На практике гипотеза H может подтверждаться не одним свидетельством, а несколькими. Формула (4.5) легко обобщается на случай нескольких свидетельств. Например, если реализовались два свидетельства E_1 и E_2 в пользу гипотезы H, то ее апостериорные шансы можно вычислить по формуле

$$O(H|E_1, E_2) = D_{E_2} \cdot D_{E_1} \cdot O(H) \text{ или } O(H|E_1, E_2) = D_{E_1} \cdot O(H|E_1).$$

Так как обычно $D_E > 1$, то получение новых свидетельств в пользу гипотезы H позволяет увеличить ее правдоподобие.

В рассмотренных выше формулах предполагалось, что свидетельства $E_1, E_2, \ldots, E_n$ полностью определены, т. е. подтверждаются с вероятностью 1. Однако на практике факты, используемые в системе, могут подтверждаться с меньшей вероятностью. Это может происходить из-за неопределенных ответов пользователя, а также в результате логического вывода, когда заключения одних правил выступают в роли факторов (свидетельств) других правил. В этом случае необходимо при вычислении правдоподобия той или иной гипотезы учитывать ненадежность фактов. Пусть известно (например, из предыдущих выводов), что свидетельство E подтверждается с вероятностью $\mathsf{P}(E|E')$, где через E' обозначено некоторое свидетельство, подтверждающее E. Тогда апостериорную вероятность гипотезы H можно вычислить по формуле

$$\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(E|E') \cdot \mathsf{P}(H|E) + \big(1 - \mathsf{P}(E|E')\big) \cdot \mathsf{P}(H| \sim E).$$

Таким образом, из формулы следует:

1) если свидетельство E подтверждается с вероятностью $\mathsf{P}(E|E') = 1$, то $\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(H, E)$;
2) если $\mathsf{P}(E|E') = 0$ т. е. свидетельство E не подтверждается, то $\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(H, \sim E)$.

Кроме того, если $\mathsf{P}(E|E') = \mathsf{P}(E)$, т. е. свидетельство подтверждается с априорной вероятностью, то значение вероятности не должно измениться: $\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(H)$

Таким образом, значения $\mathsf{P}(H|E')$ лежат в диапазоне от $\mathsf{P}(H| \sim E)$ до $\mathsf{P}(H)$, если $0 \leqslant \mathsf{P}(E|E') \leqslant \mathsf{P}(E)$, и в диапазоне от $\mathsf{P}(H)$ до $\mathsf{P}(H|E)$ если $\mathsf{P}(E) \leqslant \mathsf{P}(E|E') \leqslant 1$.

Выполнив кусочно-линейную аппроксимацию зависимости $\mathsf{P}(H|E')$ от $\mathsf{P}(E|E')$, получим следующие формулы [54]:

$$\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(H|\sim E) + \frac{\mathsf{P}(H) - \mathsf{P}(H|\sim E)}{\mathsf{P}(E)} \cdot \mathsf{P}(E|E'),$$

если $0 \leqslant \mathsf{P}(E|E') \leqslant \mathsf{P}(E)$;

$$\mathsf{P}(H|E') = \mathsf{P}(H) + \frac{\mathsf{P}(H|E) - \mathsf{P}(H)}{1 - \mathsf{P}(H)} \cdot \big(\mathsf{P}(E|E') - \mathsf{P}(E)\big),$$

если $\mathsf{P}(E) \leqslant \mathsf{P}(E|E') \leqslant 1$.

Данные формулы позволяют выполнить коррекцию значения $\mathsf{P}(H, E)$ в зависимости от вероятности подтверждения свидетельства E в экспертной системе PROSPECTOR. При заполнении базы знаний пользователям разрешается вместо вероятности $\mathsf{P}(E|E')$ задавать коэффициенты (факторы) уверенности, лежащие в диапазоне от −5 до +5. В дальнейшем значения этих коэффициентов пересчитываются в вероятности $\mathsf{P}(E|E')$.

Значение апостериорной вероятности $\mathsf{P}(H|E')$, вычисленное с учетом вероятности подтверждения свидетельства E, определяет эффективное отношение правдоподобия D_E.

$$D'_E = \frac{\mathsf{P}(H|E')}{1 - \mathsf{P}(H|E')} \cdot \frac{1 - \mathsf{P}(H)}{\mathsf{P}(H)}.$$

Данное отношение позволяет выполнять коррекцию апостериорных шансов в пользу гипотезы H [10]:

$$O(H|E') = D_{E'} \cdot O(H).$$

Правила логического вывода допускают объединение свидетельств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ с помощью логических связок И, ИЛИ, НЕ. В такой ситуации обработка каждого правила выполняется с учетом принципов нечеткой логики. Для свидетельств, связанных логической операцией И, выбирается минимальная из вероятностей. Для логической операции ИЛИ берется максимальная из вероятностей. Операция логического отрицания НЕ приводит к вычислению обратной вероятности.

При использовании байесовского подхода для обработки неточных знаний возникают две основные проблемы. Во-первых, должны быть известны все априорные условные вероятности свидетельств, а также априорные вероятности гипотез (или соответствующие отношения правдоподобия) и шансы. Во-вторых из условий теоремы Байеса следует, что все гипотезы, рассматриваемые системой, должны быть несовместны, а вероятности $\mathsf{P}(E|H_i)$ и $\mathsf{P}(E)$ — независимы. В ряде областей (например, в медицине) последнее требование не выполняется.

Кроме того, при введении новой гипотезы необходимо заново пересчитывать таблицы вероятностей, что также ограничивает применимость байесовского подхода. Тем не менее он применяется достаточно широко в системах искусственного интеллекта, благодаря хорошему теоретическому фундаменту.

Пример

Рассмотрим использование условной вероятности на примере правил, описывающих экспертную систему фондовой биржи (предположим, что эти правила относятся только к фондовой бирже) [5].

10 ЕСЛИ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ, ТО УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ
20 ЕСЛИ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = РАСТУТ, ТО УРОВЕНЬ ЦЕН = ПАДАЕТ
30 ЕСЛИ ВАЛЮТНЫЙ КУРС ДОЛЛАРА = ПАДАЕТ, ТО ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = РАСТУТ
40 ЕСЛИ ВАЛЮТНЫЙ КУРС ДОЛЛАРА = РАСТЕТ, ТО ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ

Надо определить вероятность повышения уровня цен. Цель примера не в описании реальной ситуации, а просто в иллюстрации подхода к решению задачи. Система, реализующая обратные рассуждения в части ТО правил, будет искать вывод УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ. Подойдет правило 10: УРОВЕНЬ ЦЕН = РАСТЕТ при условии, что ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ = ПАДАЮТ. Используя уравнение условной вероятности, можно оценить эти условия. Перейдем к переменным и заменим H на STOK = РАСТЕТ и E на INT = ПАДАЕТ, в результате получим уравнение:

P (STOK=РАСТЕТ) = P (STOK=РАСТЕТ | INT = ПАДАЕТ) * P (INT = ПАДАЕТ) + + P (STOK = РАСТЕТ | INT = НЕ ПАДАЕТ) * P (INT = НЕ ПАДАЕТ)

Для того чтобы определить, присвоено ли переменной INT значение ПАДАЕТ, надо вернуться к правилу 40:

40 ЕСЛИ DOLLAR = РАСТЕТ, ТО INT = ПАДАЕТ

Правило 40 преобразуется в уравнение:

P (INT = ПАДАЕТ) = P (INT = ПАДАЕТ | DOLLAR = РАСТЕТ) * P (DOLLAR = = РАСТЕТ) + P (INT = ПАДАЕТ | DOLLAR = НЕ РАСТЕТ) * P (DOLLAR = НЕ РАСТЕТ)

Поскольку ни в одном из правил в части ТО нет переменной DOLLAR, т. е. значение вероятности для нее определить нельзя, это значение должно быть введено пользователем. По этой же причине условную вероятность также должен задать пользователь (она не входит в часть ТО правил). Давайте установим вероятности появления некоторых событий, исходя из собственных обоснованных соображений:

P (DOLLAR = РАСТЕТ) = 0.6

Согласно теории вероятностей сумма вероятностей появления и не появления какого-либо события равна 1. В дальнейшем это свойство вероятностей будет часто

использоваться. Исходя из сказанного можно записать:

P (DOLLAR = НЕ РАСТЕТ) = 1 – P (DOLLAR = РАСТЕТ) = 1 – 0.6 = 0.4

Присвоим значения всем условным вероятностям:

P (INT = ПАДАЕТ | DOLLAR = РАСТЕТ) = 0.8
P (INT = ПАДАЕТ | DOLLAR = НЕ РАСТЕТ)= 0.1

Отметим, что сумма условных вероятностей для противоположностей не равняется 1. Противоположными в условной вероятности будут события DOLLAR = = РАСТЕТ и DOLLAR = НЕ РАСТЕТ. Подставив присвоенные значения в уравнение, получим:

P (INT = ПАДАЕТ) = 0.8 * 0.6 + 0.1 * 0.4 = 0.52

Из основного свойства вероятностей находим:

P (INT = НЕ ПАДАЕТ) = 1 – 0.52 = 0.48

Для того чтобы найти P (STOK=РАСТЕТ), пользователь должен задать значения условных вероятностей:

P (STOK = РАСТЕТ | INT=ПАДАЕТ) = 0.85
P (STOK = РАСТЕТ | INT = НЕ ПАДАЕТ) = 0.1

Вероятность P (STOK = РАСТЕТ) можно вычислить по первому уравнению:

P (STOK = РАСТЕТ) = 0.85 * 0.52 + 0.1 * 0.48 = 0.49 или 49 %

Получив все значения вероятностей, пользователь может определить свою политику на бирже. Интересно отметить, что в данном примере вероятность повышения уровня цен меньше 50 %. Это прямо обусловлено выбором вероятностей. Если пользователь повысит условную вероятность роста уровня цен на бирже при условии, что процентные ставки не будут падать, т. е. P (STOK = РАСТЕТ | INT = = НЕ ПАДАЕТ), повысится вероятность P (STOK = РАСТЕТ).

. . . . . .

Метод коэффициентов уверенности. Этот метод был впервые применен в ЭС MYCIN. В отличие от Байесовского подхода, который использует теорию вероятностей для подтверждения гипотез, метод системы MYCIN базируется на эвристических соображениях, которые были позаимствованы из практического опыта работы экспертов. Когда эксперт оценивает степень достоверности некоторого вывода, он использует такие понятия, как «точно», «весьма вероятно», «возможно», «ничего нельзя сказать» и т. д. Разработчики системы MYCIN решили отобразить эти размытые понятия на шкалу коэффициентов уверенности, изменяющихся в диапазоне от –1 до +1. Для этого были введены две оценки: *MB* и *MD*. Оценка

MB отражает степень истинности некоторого фактора (свидетельства) и принимает значение от 0 до +1. Оценка MD соответствует степени ложности некоторого фактора и принимает значения в диапазоне от −1 до 0. Коэффициент уверенности факта, обозначаемый CF, определяется как разность оценок MB и MD:

$$CF = MB - MD.$$

Здесь $0 < MB < 1$ (при $MD = 0$) и $-1 < MD < 0$ (при $MB = 0$). Если коэффициент уверенности принимает значение, равное +1, то факт считается истинным. Если $CF = -1$, то факт ложный. Шкала измерения значений коэффициентов уверенности изображена на рис. 2.

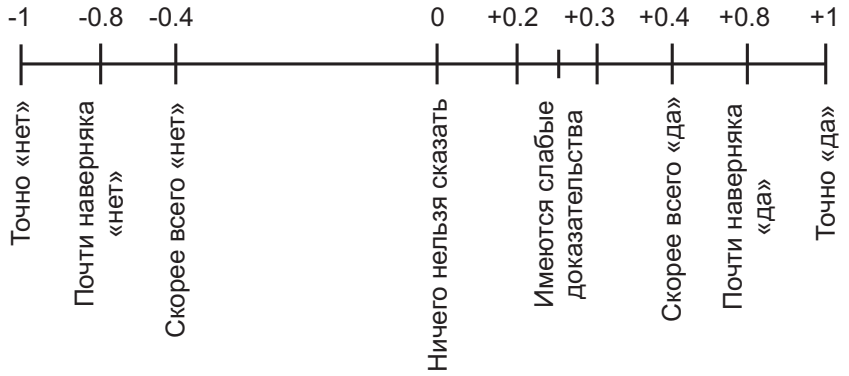

Рис. 2 – Шкала коэффициентов уверенности.

В ходе логического вывода над фактами, составляющими предпосылки правил, выполняются логические операции. В результате этого образуются сложные высказывания, коэффициенты уверенности которых вычисляются по следующим правилам:

1) при логической связи И между фактами P_1 и P_2

$$CF(P_1 \wedge P_2) = \min\big(CF(P_1), CF(P_2)\big);$$

2) при логической связи ИЛИ между фактами P_1 и P_2

$$CF(P_1 \vee P_2) = \max\big(CF(P_1), CF(P_2)\big)$$

В системе MYCIN коэффициенты уверенности приписываются не только фактам, но и правилам. Таким способом обеспечивается учет ненадежности правил, которые часто формируются на основе эвристических соображений. Обозначим коэффициент уверенности правила через CF_R. Коэффициент CF_R соответствует степени истинности заключения правила при истинных предпосылках. Ели предпосылки характеризуются коэффициентом уверенности $CF_{\text{ПРЕД}} \neq 1$, то коэффициент уверенности заключения $CF_{\text{ЗАКЛ}}$ вычисляется по формуле

$$CF_{\text{ЗАКЛ}} = CF_{\text{ПРЕД}} \cdot CF_R$$

В процессе вывода одно и то же заключение может подтверждаться различными правилами, каждое из которых приписывает заключению свой коэффициент

уверенности. Очевидно, что коэффициент уверенности, подтверждаемы несколькими правилами, должен увеличиваться. Чем больше будет иметься подтверждений в пользу некоторого заключения, тем ближе к 1 должен быть его коэффициент уверенности. В общем случае комбинация свидетельств в поддержку некоторого заключения выполняется по следующим формулам, используемым в системе EMYCIN:

$$CF = CF_1 + CF_2 - CF_1 \cdot CF_2, \text{ если } CF_1 > 0, CF_2 > 0;$$
$$CF = CF_1 + CF_2 + CF_1 \cdot CF_2, \text{ если } CF_1 < 0, CF_2 < 0;$$
$$CF = \frac{CF_1 + CF_2}{1 - \min(|CF_1|, |CF_2|)}, \text{ если } CF_1 \cdot CF_2 \leqslant 0, CF_1 \neq \pm 1, CF_2 \neq \pm 1;$$
$$\text{Если } CF_1 \neq \pm 1 \text{ и } CF_2 \neq \pm 1, \text{ то } CF = 1.$$

Коэффициент уверенности заключений, формируемых тремя или более правилами, можно вывести последовательно, применяя вышеприведенные формулы.

Метод коэффициентов уверенности благодаря своей простоте находит широкое применение во многих системах, поддерживающих вывод на ненадежных знаниях. Недостатки метода связанны с отсутствием теоретического фундамента, а также сложностью подбора коэффициентов уверенности.

Разберем пример:

Сформулируем общие принципы.

1) Выбрать минимальное значение коэффициента уверенности из коэффициентов уверенности всех условий правила, разделенных логическим оператором И.
2) Если в правиле есть оператор ИЛИ, выбрать минимальное значение из коэффициентов уверенности для всех условий правила, разделенных оператором И для всех условий, связанных оператором ИЛИ.
3) Умножить выбранный коэффициент уверенности на коэффициент уверенности правила.
4) Если существует несколько правил с одинаковым логическим выводом, выбрать из всех полученных коэффициентов уверенности максимальный.

Пример

Рассмотрим два правила с одним и тем же логическим выводом С:

$$\text{ЕСЛИ } A(\text{КУ} = 0.3) \text{ И } B(\text{КУ} = 0.6), \text{ ТО } C(\text{ТО} = 0.5),$$
$$\text{ЕСЛИ } D(\text{КУ} = 0.4) \text{ И } E(\text{КУ} = 0.7), \text{ ТО } C(\text{ТО} = 0.9),$$

где КУ — коэффициент уверенности.

В приведенных правилах коэффициент уверенности для логического вывода С подсчитывается следующим образом:

$$\text{КУ} = Maximum\Big(\big(Minimum(0.3, 0.6) \times 0.5\big), \big(Minimum(0.4, 0.7) \times 0.9\big)\Big) =$$
$$= Maximum\big((0.3 \times 0.5), (0.4 \times 0.9)\big) = Maximum(0.15, 0.36) = 0.36.$$

Приведем пример с использованием логического оператора ИЛИ:
ЕСЛИ A (КУ = 0.3) И
B (КУ = 0.6) ИЛИ
D (КУ = 0.5),
ТО C (КУ = 0.4)

В этом примере коэффициент уверенности для вывода C считается так:

$$\text{КУ} = Maximum\Big(\big(Minimum(0.3, 0.6), 0.5\big) \times 0.4\Big) =$$
$$= Maximum(0.3, 0.5) \times 0.4 = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

. . . . . .

Теория свидетельств Демстера-Шефера. В теории Демстера-Шефера [14] требование к условию $\mathsf{P}(q) + \mathsf{P}(\sim q) = 1$ ослаблено, и вместо него имеет место $\mathsf{P}(q)+\mathsf{P}(\sim q) \leqslant 1$. Подход, принятый в этой теории, отличается от байесовского подхода и метода коэффициентов уверенности тем, что, во-первых, здесь используется не точная оценка уверенности (вероятность, коэффициент уверенности), а интегральная оценка. Такая оценка характеризуется нижней и верхней границами, что более надежно. Во-вторых, теория свидетельств позволяет исключить взаимосвязь между неопределенностью (неполнотой знаний) и недоверием, которая свойственна байесовскому подходу.

В рамках этой теории множеству высказываний A присваивается диапазон значений $\big[Bl(a), Pl(A)\big]$, в котором находятся степени доверия каждого из высказываний. Здесь $Bl(A)$ — степень доверия к множеству высказываний, изменяющая свое значение от 0 (нет свидетельств в пользу A) до 1 (множество высказываний A истинно); $Pl(A)$ — степень правдоподобия множества высказываний A, определяемая с помощью формулы:

$$Pl(A) = 1 - Bl(\sim A).$$

Значения степени правдоподобия также лежит в диапазоне от 0 до 1. Степень правдоподобия множества высказываний A — это величина обратная степени доверия к множеству противоречивых высказываний $\sim A$. Если имеются четкие свидетельства в пользу $\sim A$, то $Bl(\sim A) = 1$ и степень правдоподобия A равна нулю, т. е. $Pl(A) = 0$. При $Pl(A) = 0$ степень доверия $Bl(A)$ тоже равна нулю.

В случае отсутствия информации в поддержку той или иной гипотезы полагается, что диапазон изменения значений степеней Bl и Pl равен $[0, 1]$. По мере получения свидетельств указанный диапазон сужается.

Неопределенность описания знаний можно формально представить с помощью некоторого универсального множества X. Его элементами могут быть, например, исходы решения или эксперимента (бросание монеты, прогноз погоды, покупка автомобиля), диапазон изменения физической величины, возможные семантические значения фразы, факты, заключения. Неопределенность состоит в том, что точно не известно, какой элемент $x \in X$ в действительности имел, имеет или будет иметь место. Конкретная интерпретация неопределенности может быть самая различная в зависимости от физической природы универсального множества X: неабсолютная истинность некоторого высказывания, отличная от единицы вероятность некоторого события; неполная уверенность ЛПР в своих действиях; частичная принадлежность некоторому подмножеству, которая представляет интерес при использовании нечеткой информации.

В [14] для измерения степени определенности предполагается использовать некоторую единичную массу уверенности, распределенную между элементами множества X и его подмножествами. Если при этом вся масса уверенности приходится на некоторый элемент $x_0 \in X$, то можно говорить о ситуации полной определенности.

Если же она распределена хотя бы между двумя $x_1, x_2 \in X$, то уже возникает некоторая неопределенность.

Распределение уверенности может иметь различный вид. В [14] предложена следующая геометрическая интерпретация. Так, если множество X представить в виде набора точек, то уверенность можно отобразить в виде масс, закрепленных за этими точками (рис. 3)

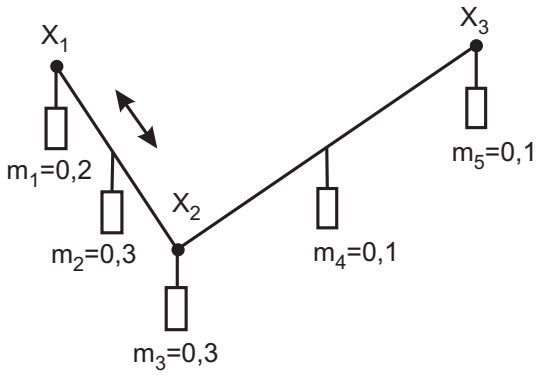

Рис. 3 – Геометрическая интерпретация распределения уверенности.

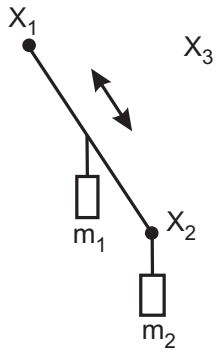

Рис. 4 – Геометрическая интерпретация распределения с неизвестными массами уверенности.

В простейшем случае массы закрепляются в точках жестко. На рис. 3 каждая из точек, составляющих множество $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, обладает жестко закрепленной массой. Однако некоторая масса уверенности может быть не только жестко закрепленной за одной точкой, но и относиться сразу к нескольким точкам одновременно. Это соответствует массе, свободно перемещающейся между этими точками, т. е. масса относится одновременно к любой из них. Данный случай соответствует большей неопределенности, когда все множество X оказывается разбитым на классы эквивалентности (подмножества), возможно, пересекающиеся, между которыми распределяется уверенность.

Так, если мы на 90 % уверены в том, что проезжающий мимо нас на высокой скорости легковой автомобиль был марки «Жигули», то масса уверенности $m_1 = 0.9$

относится ко всем моделям «Жигули», а масса $m_2 = 0.1$ — ко всем прочим маркам легковых автомобилей, причем более детально ее распределение неизвестно.

В приведенной постановке вся неопределенность сводится, таким образом, к тому или иному способу распределения массы уверенности.

Заметим, что на рис. 3 все пять масс точно известны, но налицо неопределенность — неизвестно, за какими элементами множества X закреплены массы m_1, m_2. Первая из них закреплена за подмножествам $\{x_1, x_2\}$ вторая — за $\{x_2, x_3\}$.

Тем не менее в отдельных случаях определенные выводы можно сделать даже при неизвестных массах уверенности только на основании их распределения. Так, на рис. 4 массы m_1, m_2 неизвестны, но позволяют сделать вывод о том, что нет абсолютно никакой уверенности в x_3, тогда как определенные доводы в пользу x_1 и x_2 имеются, причем в пользу x_2 их больше из-за массы m_2, закрепленной непосредственно за x_2. Ситуация, представленная на рис. 4.4, относится к так называемому согласованному распределению уверенности. Только в подобных ситуациях можно сравнить степени уверенности в том или ином элементе множества X, не зная самих масс уверенности. Во всех остальных случаях массы уверенности должны быть известны, поскольку другие варианты равносильны полной неопределенности.

Распределением уверенности, согласно [14], называется функция вида $m\colon 2^x \to [0, 1]$, обладающая свойствами: $m(\varnothing) = 0$ и $\sum\limits_{A \subseteq X} m(A) = 1$. При этом $m(A)$ выражает степень уверенности, отнесенную к множеству A в целом; если за отдельными элементами или подмножествами множества A еще закреплены отдельные массы уверенности, то в $m(A)$ они не входят. Так, для примера, представленного на рис. 4.3:

A	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$	X
$m(A)$	0	0.2	0.3	0.1	0.3	0.1	0	0

Общая степень уверенности в множестве $A \subseteq X$ может быть выражена с помощью так называемой функции уверенности $Bl\colon 2^x \to [0, 1]$, которая может быть получена из распределения уверенности: $Bl(A) = \sum\limits_{B \subseteq A} m(B)$ для всех $A \subseteq X$, т. е. суммированием масс уверенности $m(A)$, относящихся точно к множеству A, и масс уверенности $m(B)$, относящихся к его подмножествам $B \subset A$.

В [14] показано, что определенная таким образом функция удовлетворяет следующим трем свойствам:

1) $Bl(\varnothing) = 0$;
2) $Bl(X) = 1$;
3) для всех $A_1, \ldots, A_n \subseteq X, n > 0$,

$$Bl(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \sum_{\substack{I = \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \infty}} (-1)^{|I|+1} Bl(\bigcap_{i \in I} A_i),$$

где $|I|$ — мощность множества I (индексной последовательности).

Для примера, представленного на рис. 3:

A	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$	X
$Bl(A)$	0	0.2	0.3	0.1	0.8	0.5	0.3	1

Если $m(A) > 0$, то подмножество $A \subseteq X$ называется фокальным элементом распределения уверенности на множестве X. Совокупность всех фокальных элементов распределения уверенности называется его ядром. Так, для рис. 4.3 ядро распределения уверенности составляют $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3\}$ а для рис. 4 — соответственно $\{x_2\}$, $\{x_1, x_2\}$.

Задав функцию уверенности, можно определить несколько вспомогательных характеристик:

- степень сомнения в множестве $A \subseteq X$

$$Dou(A) = Bl(\sim A);$$

- степень правдоподобия множества A

$$Pl(A) = 1 - Dou(A) = 1 - Bl(\sim A) = \sum_{\substack{A \cap B = \varnothing \\ B \subseteq X}} m(B).$$

В терминах массы введенные характеристики можно интерпретировать следующим образом:

$Bl(A)$ — степень уверенности в множестве A — общая масса, которая останется, если из множества X удалить все элементы, не входящие в A, вместе с закрепленными за ними массами;

$Pl(A)$ — степень правдоподобия множества A — общая масса, которую можно сдвинуть к элементам множества A.

Для примера, представленного на рис. 4.3:

A	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$	X
$Pl(A)$	0	0.5	0.7	0.2	0.9	0.8	0.7	1

Заметим, что $Bl(A) \leqslant Pl(A)$ для всех $A \subseteq X$, т. е. $Bl(A)$ представляет нижнюю границу доверия к A, а $Pl(A)$ — верхнюю.

В [14] показано, что байесовское распределение уверенности обладает следующими свойствами, каждое из которых является его необходимым и достаточным условием:

- все фокальные элементы — точечные множества, т. е. в геометрической интерпретации все массы должны быть закреплены за точками и не имеют возможности перемещаться;
- $Bl(A) = \sum_{x_i \in X} \mathsf{P}(x_i)$ для всех $A \subseteq X$, где $\mathsf{P}(x_i) = m(\{x_i\})$ — масса уверенности, закрепленная за элементом $x_i \in X, \mathsf{P}: X \to [0, 1]$, $\sum_{x_i \in X} \mathsf{P}(x_i) = 1$;
- $Bl(A) = Pl(A)$.

Нетрудно заметить, что приведенная байесовская уверенность эквивалентна аксиоматическому определению вероятности. Таким образом, вероятность соответствует определенному (простейшему) распределению уверенности на множестве X. Отсюда следует, что теория вероятностей изучает один из частных видов неопределенности, когда все элементы множества X различимы — среди них нет хотя бы двух таких, к которым одновременно приложена одна и та же масса уверенности.

По аналогии с теорией вероятностей величины $Bl(A)$ и $Pl(A)$ получили соответственно названия: $\mathsf{P}_*(A)$ — нижней и $\mathsf{P}^*(A)$ — верхней вероятности множества $A \subseteq X$ в том смысле, что предполагается существование некоторой истинной вероятности $\mathsf{P}(A)$:

$$Bl(A) = P_*(A) \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant P^*(A) = Pl(A).$$

Тогда для байесовского распределения уверенности справедливо $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}_* = \mathsf{P}^*$.

Согласованное распределение уверенности и возможность. Рассмотрим еще один частный случай распределения уверенности. Распределение уверенности называется согласованным, если его фокальные элементы образуют вложенную последовательность. Следовательно, подмножества $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ тогда и только тогда образуют ядро согласованного распределения, когда $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n$. В [14] приведено несколько необходимых и достаточных условий согласованности распределения уверенности, в частности:

$$\text{для всех } A, B \subseteq X \qquad \mathsf{P}_*(A \cap B) = \min\{\mathsf{P}_*(A), \mathsf{P}_*(B)\};$$

$$\text{для всех } A, B \subseteq X \qquad \mathsf{P}^*(A \cup B) = \max\{\mathsf{P}^*(A), \mathsf{P}^*(B)\};$$

$$\text{для всех } A \neq \varnothing, A \subseteq X \qquad \mathsf{P}^*(A) = \max_{x \in A} \mathsf{P}^*(x).$$

Геометрическую интерпретацию согласованного распределения уверенности представим на рис. 5. Наглядно можно представить согласованное распределение уверенности на множестве X его контурной функцией π: $X \to [0, 1]$, которая определяется через верхнюю вероятность P^* следующим образом: $\pi(x) = \mathsf{P}^*(x)$. В таком случае для всех $A \subseteq X$ $\mathsf{P}^*(A) = \max_{x \in A} \pi(x)$.

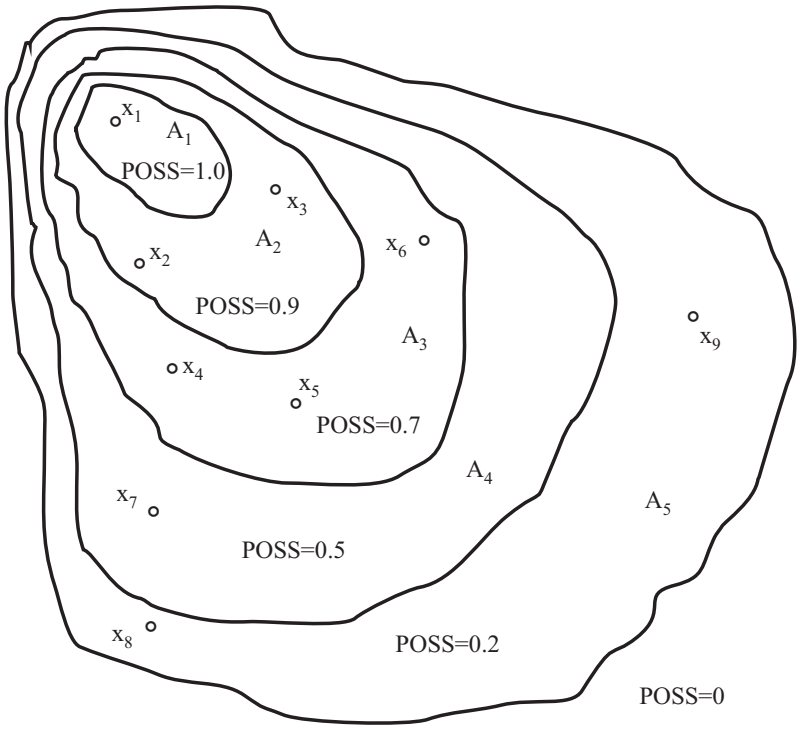

Рис. 5 – Геометрическая интерпретация согласованного распределения уверенности.

Можно показать, что приведенное определение согласованного распределения уверенности полностью соответствует определенной в [9] функции возможности

$$Poss: 2^x \to [0, 1]$$

со свойствами:

$$Poss(\varnothing) = 0$$
$$Poss(X) = 1$$

для всех $A, B \subseteq X$

$$Poss(A \cup B) = \max\{Poss(A), Poss(B)\}$$

Действительно, функция возможности соответствует определению верхней вероятности P^*, которая однозначно задается с помощью контурной функции $\pi(x), x \in X$. Поэтому согласованное распределение уверенности можно назвать распределением возможностей на множестве X. Отсюда следует эквивалентность понятий фокального элемента для согласованного распределения уверенности и уровневого множества для распределения возможностей.

3 Нечеткие знания

Наконец, остановимся на проблеме представления нечетких знаний, являющейся ключевой при разработке интеллектуальных систем различного назначения. Нечеткие знания по своей природе разнообразны и могут быть условно разделены на следующие категории: неточность, недоопределенность, неоднозначность, т. е. любые нечеткости, между которыми нельзя провести четкой границы [7, 8].

Теория нечетких множеств — это, по сути дела, шаг на пути к сближению классической математики и всепроникающей неточности реального мира, к сближению, порожденному непрекращающимся стремлением человечества к лучшему пониманию процессов мышления и познания.

В настоящее время мы не способны сконструировать машины, которые могли бы соперничать с человеком в выполнении таких задач, как распознавание речи, перевод языков, понимание сущности, абстрагирование и обобщение, принятия решений в условиях неопределенности и тем более в задачах агрегирования информации.

Наша неспособность проектировать такие машины в значительной степени объясняется фундаментальным различием между человеческим разумом, с одной стороны, и «разумом» машины — с другой. Различие состоит в той способности человеческого мозга, которой в настоящем компьютеры не обладают: думать и делать заключения в неточных, неколичественных, нечетких терминах. Благодаря этой способности люди могут расшифровывать неразборчивый почерк, понимать искаженную речь, концентрировать внимание лишь на той информации, которая приводит к решению. И именно отсутствие этой способности делает даже самые сложные вычислительные машины непригодными к осуществлению контактов с человеком естественным образом, не прибегая к посредничеству искусственно созданных языков.

Множество или совокупность объектов — основное понятие в математике. Мы не очень быстро подошли к представлению о том, что многие, возможно, большинство человеческих знаний и связей с внешним миром включают такие построения, которые нельзя назвать множествами в классическом смысле. Их следует считать «нечеткими множествами» (или подмножествами), т. е. классами с нечеткими границами, когда переход от принадлежности к классу к непринадлежности происходит постепенно, не резко. По существу ставится под сомнение, что логика человеческого рассуждения основывается не на классической двузначной или даже многозначной логике, а на логике с нечеткими значениями истинности, с нечеткими связками и нечеткими правилами вывода.

В наших поисках точности мы пытались подогнать реальность, реальный мир под математические модели, которые не оставляют места нечеткости. Мы стремились выявить законы, управляющие поведением как отдельных людей, так и групп с помощью математических выражений, подобных тем, которые используются при анализе неодушевленных систем. Это, с нашей точки зрения, было и остается неправильно направленным усилием, подобным нашим давно забытым поискам перпеттум мобиле и философского камня.

Нам нужна новая точка зрения, новый комплекс понятий и методов, в которых нечеткость принимается как универсальная реальность человеческого существования, и, конечно, нам необходимо понять, как можно оперировать с нечеткими множествами внутри жестких рамок классической математики. Но, что намного важнее, мы должны разработать новые методы обращения с нечеткостями в систематическом (не обязательно количественном) смысле. Такие методы могут открыть много новых границ в психологии, экономике, лингвистике, операционных исследованиях, управлении и обеспечить основу для проектирования систем, разум которых значительно превосходит тот искусственный интеллект, который мы можем представить.

Заслуга Л. А. Заде заключается во введении понятия взвешенной принадлежности элемента к множеству. Элемент может принадлежать подмножеству в большей или меньшей степени, и отсюда появляется основное понятие — понятие нечеткости подмножества. С совершенно другой позиции, на основе n-местной логики, Пост, Лукашевич и Мойзил разработали общие теории, в которых могут найти место некоторые аспекты теории нечетких множеств.

В обработке информации человеком или с помощью компьютера числовые и нечисловые данные на входе, а иногда и на выходе — во многих случаях не могут быть ни четкими, ни даже вероятностными. Их можно поместить только в интервалах достоверности. В этом случае и работает теория нечетких множеств.

Что же предложил Заде? Во-первых, он расширил классическое канторовское понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале $(0, 1)$, а не только значения 0 или 1. Такое множество было названо нечетким (fuzzy). Заде определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода modus ponens и modus tollens. Введя затем понятие лингвистической переменной и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л. Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость

и неопределенность выражений. Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Основанные на этой теории методы построения компьютерных нечетких систем существенно расширяют области применения компьютеров. В последнее время нечеткое управление является одной из самых активных и результативных областей исследований применения теории нечетких множеств. Следует подчеркнуть активность публикаций по формированию качественных знаний и особенно аспекты, которые связанны с лингвистической неопределенностью при работе с экспертами на естественном языке в системах искусственного интеллекта и особенно в экспертных системах.

Приведем основные положения и определения нечетких множеств [2, 4, 6, 7, 12, 13].

3.1 Нечеткие множества

Понятие нечеткого множества. Пусть U — некоторое множество объектов (элементов, точек, обозначаемых через u и $\mu_A: U \to [0,1]$. Нечетким (расплывчатым) множеством A в U есть совокупность (график) упорядоченных пар

$$A\{u, \mu_A(u)\}; u \in U,$$

где $\mu_A(u)$ представляет собой принадлежности u к A, а $\mu_A: U \to [0,1]$ функция, отображающая U в пространство M, называемое пространством принадлежности.

Когда M содержит только две точки 0 и 1, A является нерасплывчатым (четким) и его функция принадлежности совпадает с характеристической функцией нерасплывчатого множества.

В последующем мы будем предполагать, что M есть интервал $[0,1]$ причем 0 и 1 представляют соответственно низшую и высшую степень принадлежности. В качестве множества принадлежностей рассматриваются и другие интерпретации: $[-1,1]$ в экспертной системе MYCIN, $[0,10]$, $[0,100]$, любое частично упорядоченное множество и, в частности, решетка. Таким образом, задание нечеткого множества A в U эквивалентно заданию его функции принадлежности $\mu_A(u)$ и, несмотря на нечеткость его границ, может быть точно определено путем сопоставления каждому элементу u числа, лежащего между 0 и 1, т. е. $\mu_A(u)$.

Приведем частные случаи нечетких множеств, которые используются в литературе: это S и π — функции принадлежности [4, 11]:

$$\pi(u,\beta,\gamma) = \begin{cases} S\left(u; \gamma-\beta, \gamma-\dfrac{\beta}{2}, \gamma\right) & \text{для } u \leqslant \gamma; \\ S\left(u; \gamma, \gamma+\dfrac{\beta}{2}, \gamma+\beta\right) & \text{для } u \geqslant \gamma. \end{cases}$$

$$S(u,\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{для } u \leqslant \alpha; \\ 2\left(\dfrac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для } \alpha \leqslant u \leqslant \beta; \\ 1-2\left(\dfrac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для } \beta \leqslant u \leqslant \gamma; \\ 1 & \text{для } u \geqslant \gamma. \end{cases}$$

Представим их графически (рис. 6)

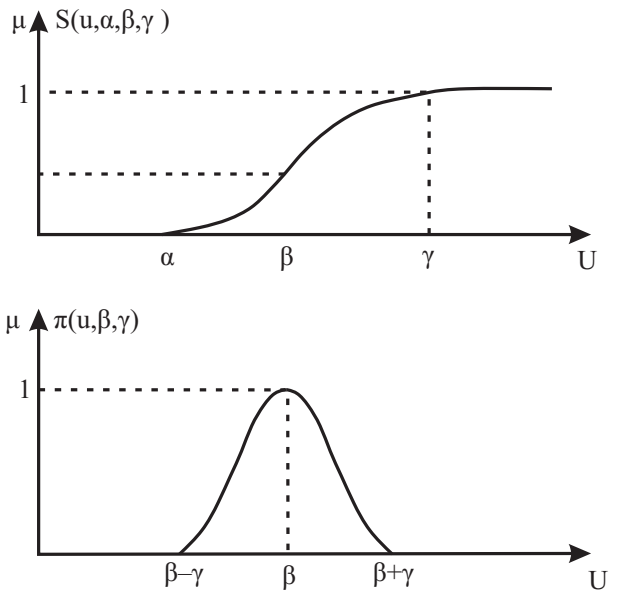

Рис. 6 – Частные случаи нечетких множеств.

Для частного случая, когда U является подмножеством числовой прямой, часто используются нечеткие множества (L-R)-типа (рис. 4.7). Функции принадлежности для таких множеств задаются с помощью функций L и R, удовлетворяющих следующим требованиям:

- $L(0) = R(0) = 1$;
- L и R — невозрастающие функции на множестве неотрицательных действительных чисел.

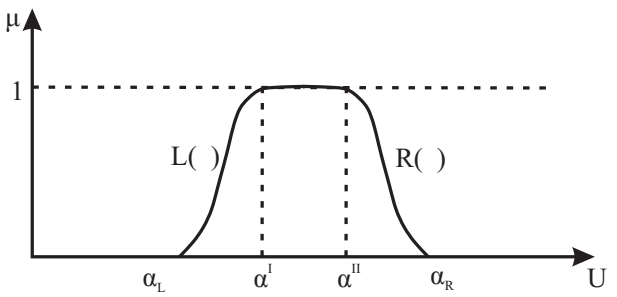

Рис. 7 – Нечеткое множество с функцией принадлежности (L-R)-типа.

Функция принадлежности нечеткого множества A, имеющая (L-R)-тип, задается следующим образом:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\alpha^I - u}{\alpha_L}\right) & \text{при } u \leqslant \alpha^I, \alpha_L > 0; \\ R\left(\dfrac{u - \alpha^{II}}{\alpha_R}\right) & \text{при } u \geqslant \alpha^{II}, \alpha_R > 0; \\ 1 & \text{при } u \in [\alpha^I, \alpha^{II}]. \end{cases}$$

Часто используются линейные функции (L-R)-типа (рис. 8)

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leqslant \alpha_L; \\ \dfrac{u - \alpha_L}{\alpha^I - \alpha_L} & \text{при } \alpha_L \leqslant u \leqslant \alpha^I; \\ 1 & \text{при } \alpha^I \leqslant u \leqslant \alpha^{II}; \\ \dfrac{\alpha_R - u}{\alpha_R - \alpha^{II}} & \text{при } \alpha^{II} \leqslant u \leqslant \alpha_R; \\ 0 & \text{при } u \geqslant \alpha_R \end{cases}$$

и частные случаи, трапециидальные при $\alpha^I < \alpha^{II}$ и треугольные при $\alpha^I = \alpha^{II} = \alpha$

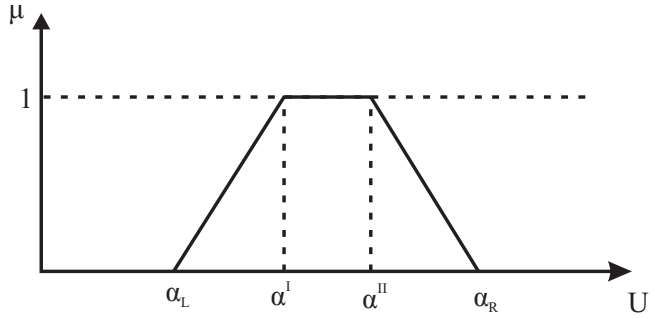

Рис. 8 – Линейная функция (L-R)-типа.

Множество нечетких подмножеств и его свойство.

Обозначим $P(U)$ множество всех подмножеств U. Например, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, тогда $P(U) = \{\varnothing, \{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}, \{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_1, u_3\}, U\}$. Это множество состоит из $2^3 = 8$ элементов. В общем случае для множеств $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ можно определить 2^n элементов. Для нечетких подмножеств множество всех подмножеств или «множество нечетких подмножеств» определяется иначе. Выпишем множество $P(U)$ нечетких множеств U:

$$P(U) = \Big\{\{(x_1|0), (x_2|0)\}, \{(x_1|0), (x_2|0.5)\}, \{(x_1|0.5), (x_2|0)\}, \\ \{(x_1|0.5), (x_2|0.5)\}, \{(x_1|0), (x_2|1)\}, \{(x_1|1), (x_2|0)\}, \{(x_1|1), (x_2|0.5)\}, \\ \{(x_1|0.5), (x_2|1)\}, \{(x_1|1), (x_2|1)\}\Big\}.$$

В общем случае, если

$$card\, U = n \text{ и } card\, M = m,$$

где card означает «мощность», а в нашем случае число элементов множество, то $card\,P(U) = m^n$.

Простейшие операции над нечеткими множествами. Основные теорико-множественные операции над $P(U)$ в теории нечетких множеств.

Включение. Пусть U — множество принадлежностей и A и B — два нечетких подмножества U. Будем говорить, что A содержится в B, если $\forall u \in U: \mu_A(u) \leqslant \mu_B(u)$, и обозначать $A \subset B$

Пример

Пусть $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $M = [0, 1]$.

$$A = \{(x_1|0.4), (x_2|0.2), (x_3|0), (x_4|1)\}.$$
$$B = \{(x_1|0.3), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0)\}.$$

Имеем $A \subset B$, так как $0.3 < 0.4, 0 < 0.2, 0 = 0, 0 < 1$.

. . . . . .

Равенство. Два нечетких подмножества A и B множества U равны $A = B$ тогда и только тогда, когда $\forall u \in U: \mu_A(u) \leqslant \mu_B(u)$.

Дополнение. Два нечетких подмножества A и B множества U дополняют друг друга: $B =\sim A$ или $\sim A = B$, если $\forall u \in U: \mu_B(u) = 1 - \mu_A(u)$, это обозначается $B =\sim A$ или $\sim A = B$.

Пример

Пусть $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $M = [0, 1]$.

$$A = \{(x_1|0.13), (x_2|0.61), (x_3|0), (x_4|0), (x_5|1), (x_6|0.03)\}.$$
$$B = \{(x_1|0.87), (x_2|0.39), (x_3|1), (x_4|1), (x_5|0), (x_6|0.97)\}.$$

Тогда, очевидно, $\bar{A} = B$.

. . . . . .

Пересечение. Пересечение двух нечетких подмножеств A и B $(A \cap B)$ в множестве U определяется как наименьшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B:

$$\forall u \in U: \mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)).$$

Пример

Пусть $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$,

$$A = \{(x_1|0.2), (x_2|0.7), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.5)\},$$
$$B = \{(x_1|0.5), (x_2|0.3), (x_3|1), (x_4|0.1), (x_5|0.5)\},$$
$$A \cap B = \{(x_1|0.2), (x_2|0.3), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|0.5)\}.$$

. . . . . .

Объединение. Объединение двух подмножеств A и B $(A \cup B)$ в множестве U определяется как наибольшее нечеткое подмножество, которое содержится как в A, так и B:

$$\forall u \in U: \mu_{A \cap B}(u) = \max\big(\mu_A(u), \mu_B(u)\big).$$

Алгебраическая (дизъюнктивная) сумма. Дизъюнктивная сумма двух нечетких подмножеств A и B $A \oplus B$ определяется в терминах объединений и пересечений следующим образом:

$$A \oplus B = (A \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap B) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \cdot \mu_B(u).$$

Алгебраическое произведение. Алгебраическое произведение двух нечетких множеств A и B $(A \cdot B)$ определяется следующим образом:

$$\forall u \in U: \mu_{A \cdot B}(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u).$$

Расстояние между нечеткими множествами. В математике под расстоянием $d(x, y)$, т. е. парой элементов множества U, будет величина, удовлетворяющая следующим условиям:

$\forall x, y, z \in U$:
1) $d(x, y) \geqslant 0$ — *неотрицательность*;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ — *симметричность*;
3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) * d(y, z)$ — *транзитивность*;
4) $d(x, z) = 0$.

Здесь $*$ оператор, связанный с понятием расстояния Хэмминга, — т. е. действительное расстояние, если оператор $* = +$, то обычная сумма.

Для двух обычных подмножеств A и B и конечного множества U

$A =$

u_1	u_2	u_3		$\ldots$		u_7
1	0	0	1	0	1	0

$B =$

u_1	u_2	u_3		$\ldots$		u_7
0	1	0	0	0	1	1

расстояние Хэмминга между A и B рассчитывается по формуле

$$d(A,B) = \sum_{i=0}^{n} \left|\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)\right|, \text{ т. е.}$$

$$d(A,B) = |1-0| + |0-1| + |0-0| + |1-0| + |0-0| + |1-1| + |0-1| =$$
$$= 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 4.$$

Для конечного множества U мощности n (т. е. n — число элементов в U) определим также относительное расстояние Хэмминга:

$$\delta(A,B) = \left(\frac{1}{n}\right) d(A,B).$$

Для нашего примера $\delta(A,B) = d(A,B)/7 = 4/7$.

Для обобщенного понятия «расстояние Хэмминга» для нечетких множеств рассмотрим три нечетких подмножества $A, B, C \subset U$, где U — конечное множество мощности n.

$A =$

u_1	u_2	u_3	$\ldots$	u_n
a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n

$B =$

b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n

$C =$

c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_n

Предположим, что мы определили расстояние $D(a_i, b_i)$ между a_i и b_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, а также для (b_i, c_i) и (a_i, c_i). Тогда для этих расстояний справедливо неравенство

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n\colon D(a_i, c_i) \leqslant D(a_i, b_i) * D(b_i, c_i).$$

Теперь можно записать:

$$\sum_{i=0}^{n} D(a_i, c_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n} D(a_i, b_i) + \sum_{i=0}^{n} D(b_i, c_i),$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} D^2(a_i, c_i)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} D^2(a_i, b_i)} + \sqrt{\sum_{i=0}^{n} D^2(b_i, c_i)}.$$

Эти две формулы дают две оценки расстояния между нечеткими подмножествами: первая — линейную оценку, а вторая — квадратичную.

Приведем окончательные известные расстояния между нечеткими множествами (табл. 1).

Понятие расстояния используется для измерения степени нечеткости множества. Мера нечеткости — это параметр оценки качества процедур и алгоритмов принятия решений, распознавания образов и т. д. Разработаны следующие методы оценки нечеткости: энтропийный, метрический, аксиоматический. Не будем останавливаться на этих методах, а покажем актуальность приведенных расстояний на простейшем примере определения обычного подмножества, ближайшего к нечеткому. Таким образом, четкое множество А должно быть расположено на наименьшем Евклидовом расстоянии от данного нечеткого подмножества (или иметь наименьшую норму).

Таблица 1 – Расчетные формулы расстояний для нечетких подмножеств на универсальном множестве U.

Вид расстояния	Тип универсального множества	Формула расстояния
Хэмминга	$\lvert U\rvert = n$	$d(A,B) = \sum\limits_{i=0}^{n}\lvert\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)\rvert$
Хэмминга	$U \subseteq R^1$	$d(A,B) = \int\limits_{u}\lvert\mu_A(u) - \mu_B(u)\,du\rvert$
Относительное Хэмминга	$U \subseteq R^1$	$\delta(A,B) = \frac{1}{\lvert U\rvert}\int\limits_{u}\lvert\mu_A(u) - \mu_B(u)\,du\rvert$
Евклида	$\lvert U\rvert = n$	$l(A,B) = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)\right)^2}$
Относительное Евклида	$\lvert U\rvert = n$	$\varepsilon(A,B) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)\right)^2}$
Относительное Хэмминга	$\lvert U\rvert = n$	$\delta(A,B) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}\lvert\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)\rvert$
Евклида	$U \subseteq R^1$	$l(A,B) = \sqrt{\int\limits_{i=0}\left(\mu_A(u) - \mu_B(u)\right)^2 du}$
Относительное Евклида	$U \subseteq R^1$	$\varepsilon(A,B) = \frac{1}{\sqrt{\lvert U\rvert}}\sqrt{\int\limits_{i=0}\left(\mu_A(u) - \mu_B(u)\right)^2 du}$

Легко доказать, что это будет обычное множество, такое, что

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(u_i) < 0.5, \\ 1, & \text{если } \mu_A(u_i) > 0.5, \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_A(u_i) = 0.5, \end{cases}$$

где по определению пользователя мы принимаем, что $\mu_A(u_i) = 0$, если $\mu_A(u_i) = 0.5$.

Пример

Нечеткое множество	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
	0.2	0.8	0.5	0.3	1	0	0.9	0.4
Четкое множество	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
	0	1	0	0	1	0	1	0

. . . . . .

Подмножество α*-уровня.* Пусть $\alpha \in [0,1]$; подмножеством α-уровня нечеткого подмножества A будем называть обычное нечеткое подмножество $A_\alpha = \{x|\mu_A(u) \geqslant \alpha\}$.

Пример

Пусть задано нечеткое подмножество

$A =$

u_1	u_2	u_3		$\ldots$		u_7
0.8	0.1	1	0.3	0.6	0.2	0.5

Имеем подмножество α-уровня:

$A_{0.3} =$

u_1	u_2	u_3		$\ldots$		u_7
1	0	1	1	1	0	1

$A_{0.55} =$

u_1	u_2	u_3		$\ldots$		u_7
1	0	1	0	1	0	0

. . . . . .

3.2 Нечеткие отношения

Понятие отношения (графа) играет важную роль в математике и в системах искусственного интеллекта: распознавании образов, проектировании сложных систем, выводах, системах формирования БЗ, анализе, управлении, моделировании, принятии решений и т. д. Их можно обобщить на случай нечетких подмножеств. При этом обнаруживаются некоторые новые свойства. Например, понятие класса эквивалентности заменяется понятием подобия, не таким жестким, но имеющим смысл для многих приложений. Предпорядок и порядок обобщаются аналогичным образом, определяются отношения сходства и несходства и т. д.

Пусть $U_1 = \{x\}$ и $U_2 = \{y\}$ обычные множества. Прямое произведение $U_1 \times \times U_2$ множеств U_1 и U_2 есть множество упорядоченных пар (x, y), т. е. $U_1 \times U_2 = = \{(x, y): x \in U_1, y \in U_2\}$.

Пусть M — множество принадлежностей. Тогда нечеткое множество R такое, что $\forall (x, y) \in U_1 \times U_2, \mu_R(x, y) \in M$ называется бинарным отношением R в $U_1 \times U_2$.

Пример

Пусть $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, U_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, M = [0, 1]$.

Тогда нечеткое бинарное отношение можно (субъективно) задать следующей таблицей:

Обобщая, получим нечеткое n-парное отношение, т. е. нечеткое множество в $P_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$.

Далее для обозначения экстремума будем использовать символы:

$\bigvee\limits_x$ — максимум относительно элемента или переменной x;

$\bigwedge\limits_x$ — минимум относительно элемента или переменной x.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0.1	0.3	1
x_2	0	0.8	0	0	1
x_3	0.4	0.4	0.5	0	0.2

Так $\mu_1(x) = \bigvee_y \mu(x,y) = \max_y \mu(x,y)$ и $\mu_2(x) = \bigwedge_y \mu(x,y) = \min_y \mu(x,y)$.

. . . . . .

Проекции нечеткого отношения. Первую проекцию R определяет функция принадлежности

$$\mu_R^{(1)}(x) = \bigvee_y \mu_R(x,y).$$

Вторую проекцию R определяет функция принадлежности

$$\mu_R^{(2)}(x) = \bigwedge_y \mu_R(x,y).$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) будет называться глобальной проекцией нечеткого отношения и обозначается $h(R)$:

$$h(R) = \bigvee_x \bigvee_y \mu_R(x,y) = \bigvee_y \bigvee_x \mu_R(x,y).$$

Пример

Зададим матрицу R и рассчитаем первую, вторую и глобальные проекции нечеткого отношения (рис. 9).

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0.2	1	0.3
x_2	0.6	0.8	0	0.1
x_3	0	1	0.3	0.6
x_4	0.8	0.1	1	0
x_5	0.9	0.7	0	0.5
x_6	0.9	0	0.3	0.7

1
0.8
1
1
0.9
0.9

Первая проекция

0.9	1	1	0.7

Вторая проекция

1

Глобальная проекция

Рис. 9 – Расчет проекций нечеткого отношения.

. . . . . .

Носитель нечеткого отношения. Носителем нечеткого отношения R называется обычное множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна:

$$S(R) = \{(x,y) | \mu_R(x,y) > 0\}.$$

Далее можно рассматривать объединение, пересечение, алгебраическое произведение, сумму, дополнение, дизъюнктивную сумму двух отношений и обычное отношение ближайшее к нечеткому [4].

Композиция двух нечетких отношений. Операция композиции нечетких отношений R_1 в $X \times Y$ и R_2 в $Y \times Z$ позволяет определить нечеткое отношение в $X \times Z$.

Max-min композиция. Пусть $R_1 \subset X \times Y$ и $R_2 \subset Y \times Z$; (max-min)-композиция отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \circ R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \bigwedge_x \mu_{R_2}(y,z)\right] = \max\left[\min\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)\right)\right],$$

где $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

Пример

Пусть функции принадлежности заданы на конечном универсальном множестве (рис. 10).

R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0	1	0.7
x_2	0.3	0.5	0	0.2	1
x_3	0.8	0	1	0.4	0.3

R_2

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.3	0.4
y_2	0.2	1	0.8	0
y_3	0.8	0	0.7	1
y_4	0.4	0.2	0.3	0
y_5	0	1	0	0.8

$R_1 \circ R_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.4	0.7	0.3	0.7
x_2	0.3	1	0.5	0.8
x_3	0.8	0.3	0/7	1

Рис. 10 – Пример расчета max-min композиции.

На рисунке заданы R_1 и R_2 матрицами и рассчитывается композиция $R_2 \circ R_1$. Рассчитаем $(x,z) = (x_1, z_1)$.

$$\min\left(\mu_{R_1}(x_1,y_1), \mu_{R_2}(y_1,z_1)\right) = \min(0.1; 0.9) = 0.1;$$
$$\min\left(\mu_{R_1}(x_1,y_2), \mu_{R_2}(y_2,z_1)\right) = \min(0.2; 0.2) = 0.2;$$
$$\min\left(\mu_{R_1}(x_1,y_3), \mu_{R_2}(y_3,z_1)\right) = \min(0; 0.8) = 0;$$
$$\min\left(\mu_{R_1}(x_1,y_4), \mu_{R_2}(y_4,z_1)\right) = \min(1; 0.4) = 0.4;$$
$$\min\left(\mu_{R_1}(x_1,y_5), \mu_{R_2}(y_5,z_1)\right) = \min(0.7; 0) = 0;$$
$$\max_{y_i}\left(\min \mu_{R_1}(x_i,y_i), \mu_{R_2}(y_i,z_i)\right) = \max(0.1; 0.2; 0; 0.4; 0) = 0.4;$$

Результат представлен на рис. 10.

(Max-)-композиция.* Операцию $\wedge$ в предыдущем примере произвольно можно заменить любой другой, для которой выполняются те же ограничения, что и для $\wedge$: ассоциативность и монотонность неубывания по каждому аргументу.

Тогда можно записать:

$$\mu_{R_1 * R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) * \mu_{R_2}(y,z)\right].$$

Теперь можно представить различные композиции.

Например:

1) (max-·) — композиция, где · это умножение и формула приобретает вид:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)\right].$$

2) Замена операции $\min(\wedge)$ на среднее арифметическое. Тогда формула приобретает вид:

$$\mu_{R_1 * R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\frac{1}{2}\left(\mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(y,z)\right)\right].$$

Выбор варианта (max-*)-композиции определяется свойствами задачи.

Рассматривая нечеткие бинарные отношения, введем некоторые типы отношений.

1) Транзитивное и рефлексивное нечеткое бинарное отношение называется нечетким *отношением предпорядка*.
2) Антисимметричное нечеткое отношение предпорядка называется нечетким *отношением порядка*.
3) Транзитивное рефлексивное симметричное нечеткое бинарное отношение называется *отношением подобия*.
4) Нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами антирефлективности, симметричности и (min-max)-транзитивности называется *отношением различия*.

3.3 Элементы теории приближенных рассуждений

Системы нечеткого логического вывода играют важнейшую роль в многочисленных приложениях нечетких множеств (экспертные системы, системы автоматического формирования БЗ, распознавание образов, проектирование сложных систем, нейронные сети, системы принятия решений, понимание естественного языка и т. д.).

В основе большинства таких систем лежат логические правила вида «Если . . . , то . . . », в которых посылки и выводы являются нечеткими понятиями [2–7].

Приближенные рассуждения на основе modus ponens. Известно правило вывода modus ponens в обычной логике:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: x есть A

Следствие: y есть B,

где x, y — имена объектов, A, B — обозначения понятий областей рассуждения U и V соответственно.

Пример

Посылка 1: если слива черная, то слива спелая

Посылка 2: эта слива черная

Следствие: эта слива спелая.

Обобщением данного правила с посылками, являющимися нечеткими понятиями, можно записать:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: x есть A^1

Следствие: y есть B^1.

. . . . . .

Пример

Посылка 1: если слива черная, то слива спелая

Посылка 2: эта слива очень черная

Следствие: эта слива очень спелая.

. . . . . .

Мы можем получить обычный modus ponens при $A^1 = A$ и $B^1 = B$, а в последнем примере у нас обобщенный modus ponens. В посылке 1 мы видим некоторое соответствие между A и B. В литературе приводится несколько отношений, соответствующих такому соответствию.

Если мы рассмотрим отношения в универсальных множествах U и V; функции принадлежности $\mu_A(u), \mu_B(u)$; операции $\times, \cup, \cap, \sim$ и $\oplus$, т. е декартово произведение, объединение, пересечение, дополнение и ограниченная сумма, то представим следующие нечеткие отношения, которые могут служить формализацией нечеткого условного высказывания «Если x есть A, то y есть B» [116].

1) $R_m = (A \times B) \cup (\sim A \times V) = \max\Big[\min\big(\mu_A(u), \mu_B(v)\big), 1 - \mu_A(u)\Big]$.

2) $R_a = (\sim A \times V) \oplus (U \times B) = \min\big(\mu_A(u), \mu_B(v)\big)$.

3) $R_S = A \times V \overset{S}{\Rightarrow} U \times B = \mu_A(u) \overset{S}{\to} \mu_B(v)$,

$$\text{где } \mu_A(u) \overset{S}{\to} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_A(u) \leqslant \mu_B(v), \\ 0 & \text{при } \mu_A(u) > \mu_B(v). \end{cases}$$

4) $R_g = A \times V \overset{g}{\Rightarrow} U \times B = \mu_A(u) \overset{g}{\to} \mu_B(v)$,

$$\text{где } \mu_A(u) \overset{g}{\to} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_A(u) \leqslant \mu_B(v), \\ \mu_B(v) & \text{при } \mu_A(u) > \mu_B(v). \end{cases}$$

$$5)\ R_{sg} = \left(A \times V \overset{s}{\Rightarrow} U \times B\right) \cup \left(\sim A \times V \overset{g}{\Rightarrow} U \times \sim B\right) =$$
$$= \min\left[\mu_A(u) \overset{s}{\to} \mu_B(v), \left(1 - \mu_A(u)\right) \overset{g}{\to} \left(1 - \mu_B(v)\right)\right].$$
$$6)\ R_{gg} = \left(A \times V \overset{g}{\Rightarrow} U \times B\right) \cap \left(\sim A \times V \overset{g}{\Rightarrow} U \times \sim B\right) =$$
$$= \min\left[\mu_A(u) \overset{g}{\to} \mu_B(v), \left(1 - \mu_A(u)\right) \overset{g}{\to} \left(1 - \mu_B(v)\right)\right].$$
$$7)\ R_{gs} = \left(A \times V \overset{g}{\Rightarrow} U \times B\right) \cap \left(\sim A \times V \overset{s}{\Rightarrow} U \times \sim B\right) =$$
$$= \min\left[\mu_A(u) \overset{g}{\to} \mu_B(v), \left(1 - \mu_A(u)\right) \overset{s}{\to} \left(1 - \mu_B(v)\right)\right].$$
$$8)\ R_{ss} = \left(A \times V \overset{s}{\Rightarrow} U \times B\right) \cap \left(\sim A \times V \overset{s}{\Rightarrow} U \times \sim B\right) =$$
$$= \min\left[\mu_A(u) \overset{s}{\to} \mu_B(v), \left(1 - \mu_A(u)\right) \overset{s}{\to} \left(1 - \mu_B(v)\right)\right].$$

Следствие B^1 в обобщенном modus ponens получается из посылки 1 и посылки 2 как max-min-композиция нечеткого множества A^1 и нечеткого отношения, полученного в одном из правил, т. е. $R_m, R_a, R_s, \ldots, R_{ss}$.

Например: $B_m^1 = A^1 \circ R_m = A^1 \circ \left[(A \times B) \cup (\sim A \times V)\right]$.

Таким образом, из одной посылки A^1 мы можем получить различные выводы, и это различие в основном зависит от решаемой задачи и ЛПР.

В [4–7] для сравнения различных методов нечетких рассуждений формулируются интуитивно различные требования к связи между A^1 и B^1. В качестве A^1 берутся высказывания:

A^1 = очень A

A^1 = более или менее A

A^1 = не A

Каким может быть B^1 для A^1? Если существует сильная причинная связь между высказываниями «x есть A» и «y есть B» в высказывании «если x есть A, то y есть B», то для A^1 = очень A, мы должны требовать B^1 = очень B. Если причинная связь не является жесткой, для указанного A^1 можно требовать выполнения и $B^1 = B$. Если, например, утверждение «Если x есть A, то y есть B» неявно подразумевается как утверждение «если x есть A, то y есть B, иначе y не есть B», то для A^1 = не A мы должны требовать выполнения B^1 = не B.

Приближенные рассуждения на основе modus tollens подобны вышеприведенным рассуждениям, а следствие A^1 получается в результате max-min-композиции соответствующих отношений $R_m, R_a, R_s, \ldots, R_{ss}$ и нечеткого множества B^1.

Пример

Посылка1: если x есть A, то y есть B

Посылка 2: y есть не B^1

Следствие: x есть не A^1.

. . . . . .

3.4 Лингвистическая переменная

Понятие лингвистической переменной. Л. Заде ввел понятие нечеткой переменной как тройку [3]:

$$\langle \alpha, U, G \rangle,$$

где α — наименование (имя) нечеткой переменной;

U — область ее определения (универсальное множество);

G — нечеткое множество в U, описывающее ограничения на возможные значения нечеткой переменной α (ее семантику).

В зависимости от характера множества U нечеткие переменные могут быть разделены на числовые и нечисловые. К числовым отнесем переменные, у которых $U \subset R^1$.

Лингвистическая переменная является переменной более высокого порядка, чем нечеткая переменная. Это определяется тем, что значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные. Например, значениями лингвистической переменной «качество» могут быть «низкое», «среднее» и т. д. Каждое из этих значений является названием нечеткой переменной.

Итак, значениями лингвистической переменной являются не числа, как у числовой переменной, а слово или предложение в естественном или формальном языках. Это свойство лингвистической переменной дает возможность приближенно описывать сложные, количественно трудноописываемые на привычном естественном языке системы и явления.

Для описания структуры лингвистической переменной используются следующие два правила:

- Синтаксическое, которое задается в форме грамматики, порождающей название значений переменной;
- Семантическое, которое определяет алгоритмическую процедуру для вычисления смысла каждого значения. Семантическое правило M (например, экспертный опрос) позволяет превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой V, в нечеткую переменную, т. е. приписать ему семантику путем формирования соответствующего нечеткого множества.

Введем понятие лингвистической переменной как

$$\langle A, T(A), U, V, M \rangle,$$

где A — название переменной;

$T(A)$ — терм-множества переменной A, т. е. множество названий лингвистических значений переменной A, причем каждое из таких значений — нечеткая переменная со значениями из универсального множества U;

V — синтаксическое правило (обычно грамматика), порождающее названия значений лингвистической переменной A;

M — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной из $T(A)$ нечеткое подмножество универсального множества U.

Пример

Пусть определяется температура окружающего воздуха с помощью понятий-значений: «очень холодно», «холодно», «свежо», «не холодно», «тепло», «жарко». Каждому понятию-значению соответствует определенная температура (рис. 11). При этом минимальная и максимальная температуры соответственно равны $-40\,^{\circ}\mathrm{C}$ и $+40\,^{\circ}\mathrm{C}$. Тогда формально лингвистическая переменная «температура» представляется набором:

$$\langle \text{температура, очень холодно, холодно, свежо, не холодно, тепло, жарко } [-40, +40], V, M \rangle,$$

где V — процедура перебора элементов терм-множества T;

M — процедура, которая ставит в соответствие нечетким переменным (жарко, тепло и т. д.) температуру окружающего воздуха. Иначе. Процедура M определяет взаимосвязь нечетких переменных с соответствующими функциями принадлежности.

. . . . . .

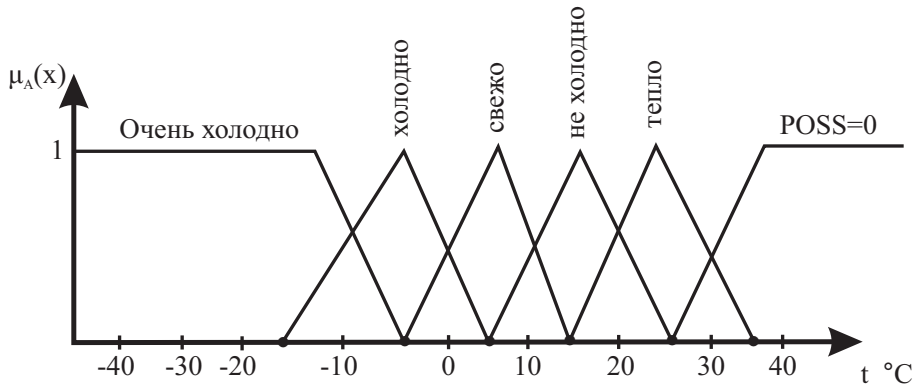

Рис. 11 – Лингвистическая переменная «температура».

Пример

Пусть оценка объема вырабатываемой продукции производится с помощью понятий нечетких переменных — «мало», «ниже среднего», «среднее», «выше среднего», «много». При этом максимальный объем выработки продукции равен 20 т/ч. Формализация такой оценки может быть проведена с помощью лингвистической переменной A = «объем продукции», характеризуемой набором:

$$\langle \text{Объем продукции}, T(A)[0.20], V, M \rangle,$$

где $T(A) = \{$мало, ниже среднего, среднее, выше среднего, много$\}$ — терм-множество лингвистической переменной, $U = [0, 20]$ — универсальное множество, характеризующее область определения базовой переменной для каждого из термов и для базовой переменной;

V — процедура перебора элементов множества $T(A)$;

M — процедура экспертного опроса, с помощью которого определяется смысл нечеткой переменной, т. е. множества M.

. . . . . .

Л. Заде различает базовые термины («холодно», «нормально», «жарко») и модификаторы («очень», «не»). Модификаторы могут применяться как к базовым переменным, так и к комбинациям базового термина и модификатора («очень-очень холодно»). Правила применения модификаторов задаются синтаксическим правилом V.

Разница между базовым термином и модификатором заключается в следующем. Для базовых переменных функции принадлежности задаются, а модификаторы действуют как некоторые операторы над этими функциями. Например, в качестве «очень» предлагается следующая модификация функции принадлежности какого-либо термина: $\mu(u) = \mu^2(u)$ или $\mu(u) = \mu^{1/2}(u)$ и т. д.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда лингвистическая переменная A = «рост» имеет два терм-множества $T_1(A) = \{$низкий, высокий$\}$ и $T_2(A) = \{$низкий, средний, высокий$\}$ — имеет три терм-множеств. Интуитивно ясно, что функции принадлежности «низкий», «высокий» в обоих случаях будут различаться: новое понятие «средний» модифицирует их, сдвигая к концам универсума. Это говорит о том, что семантика некоторого термина зависит от контекста.

Проблема. Можно ли, учитывая некоторые особенности восприятия человеком объектов реального мира и их описания, сформулировать правило выбора оптимального множества значений признаков, по которым описываются эти объекты?

Возможны два критерия оптимальности:

- Под оптимальным понимаются такие множества значений, используя которые человек испытывает минимальную неопределенность при описании объекта.
- Если объект описывается некоторым количеством экспертов, то под оптимальными понимаются также множества значений, которые обеспечивают минимальную степень рассогласованности описаний.

Представим методику выбора оптимального множества значений качественного признака.

1) Формируются все возможные («разумные») множества значений признаков.
2) Каждое множество значений признака представляется в виде полного ортогонального семантического пространства.
3) Для каждого множества значений вычисляется степень нечеткости полного ортогонального семантического пространства.
4) В качестве оптимального множества значений как по критерию 1, так и по критерию 2 выбирается то множество, степень которого минимальна.

В повседневной жизни часто используются приближенные выводы на основе нечетких исходных высказываний. Например:

Если температура низкая, то время нагрева большое.

Температура слишком низкая.

Время нагрева слишком большое.

Для формализации такого вывода Заде предложил обобщенное правило modus ponens в форме:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B, иначе есть C

Посылка 2: x есть A^1

Следствие: y есть D,

где A, A^1, B, C, D — нечеткие переменные, представленные нечеткими множествами, заданными на следующих областях определения U, U, V, V, V; x, y — лингвистические переменные. Это правило имеет существенную особенность по сравнению с традиционным правилом modus ponens

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

В обобщенном правиле множества A и $A1$ не совпадают. Если A и $A1$ более или менее сопоставимы, то можно получить следствие D, в некоторой степени подобное B, иначе D, в некоторой степени подобно C. Ранее было отмечено, что для формализации правила $A \to B$ можно использовать нечеткое отношение, определяемое с помощью декартова произведения $A \times B$. По аналогии с этим, для формализации первой посылки обобщенного правила вывода, Заде предложил два композиционных отношения. Одно из них называется максиминным и имеет вид

$$R_m = (A \times B) \cup (\sim A \times C).$$

Здесь нечеткое отношение $A \times B$ соответствует первой части правила (т. е. «если A, то B»), а нечеткое отношение $\bar{A} \times C$ — второй части правила (т. е. «если не A, то C»). В частном случае, когда альтернативная ветвь правила отсутствует, отношение R_m сводится к отношению $R = A \times B$, которое называют отношением минимум.

Следствие D обобщенного правила вывода можно вывести из посылки 1 и посылки 2 на основании max-min свертки нечеткого множества A^1 и R_m:

$$D = A^1 \circ R_m = A^1 \circ \left[(A \times B) \cup (\sim A \times C)\right] \equiv$$
$$\equiv \left\{ v \middle| \bigvee_u \left\{ \mu_A(u) \wedge \left[\left(\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)\right) \vee \left(\left(1 - \mu_A(u)\right) \wedge \mu_C(v)\right) \right] \right\} \right\}.$$

Пример

Рассмотрим пример. Найдем следствие правила о температурах. Пусть множество U соответствует температурам, а множество V — времени нагрева:

$U = \{30, 40, 50, 60\}, V = \{30, 60, 120, 240\}$ [мин].

Введем нечеткие переменные A (низкая температура), A^1 (слишком низкая температура) и B (большое время нагрева):

$$A = \{(30|1.0), (40|0.8), (50|0.2), (60|0)\},$$
$$A^1 = \{(30|1.0), (40|0.2), (50|0), (60|0)\},$$
$$B = \{(30|0), (60|0.1), (120|0.8), (240|1.0)\}.$$

Следствие D определяется с помощью формулы

$$D = A^1 \circ [A \times B].$$

Определяем произведение $A \times B$:

$$A \times B = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.8 & 1.0 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Отсюда

$$\mu_D(v) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.8 & 1.0 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $D = \{(30|0), (60|0.1), (120|0.8), (240|1.0)\}$, т. е. время нагрева действительно большое.

. . . . . .

Отметим, что в лингвистической логике существует несколько вариантов построения нечетких выводов. Рассмотренный вариант, основанный на применении максиминного отношения, не всегда совпадает с нашей интуицией.

В нечеткой среде в виде нечетких понятий и отношений могут быть выражены все элементы задачи.

Возникновение нечеткого описания задачи возможно в следующих случаях.

1) Ограничения на ресурсы моделирования (временные, стоимостные) не позволяют получить в принципе существующую четкую информацию и вынуждают системных аналитиков воспользоваться знаниями экспертов, которые выражаются последними в нечеткой словесной форме. В результате обычная задача оказывается погруженной в нечеткую среду.
2) Имеющаяся числовая информация не позволяет найти решение формальными методами при существующих ограничениях на ресурсы, но ЛПР тем не менее находит, пользуясь своим опытом, который он может передать другому ЛПР в виде совокупности нечетких правил.
3) На ранних стадиях проектирования сложных (быть может, ранее не создававшихся) объектов, созданных на том или ином пути проектирования. Ресурсы на проработку всех вариантов проекта отсутствуют, а опыт конструкторов выражается качественно. Ставится задача отсева части вариантов на основе векторного показателя качества с нечеткими оценками значений его компонентов. В данном случае задача проектирования уже в исходном виде является погруженной в нечеткую среду.

Контрольные вопросы

1) Запишите условия задачи в случае неопределенности.
2) Сформулируйте виды неопределенности описания задач.
3) Дайте характеристику физической и лингвистической неопределенностей.
4) Охарактеризуйте неоднозначность описания задач.
5) Дайте характеристику терминов, качественно характеризующих количество отсутствующей информации об элементах задачи.
6) Дайте характеристику источников (причин) возможной неоднозначности описания задачи.
7) Расскажите об особенностях знаний в БЗ.
8) Поясните смысл понятий «полнота», «непротиворечивость», «монотонность», «неточность», «неопределенность» знаний.
9) Приведите примеры вышеперечисленных понятий знаний.
10) Представьте формальное представление монотонности логических выводов.
11) Каким термином мы определяем истинность информации?
12) Для каких понятий используется количественная мера (например, функция неопределенности)?
13) Сформулируйте основные понятия о теории вероятности, возможности, свидетельства.
14) Опишите Байесовский метод.
15) Опишите метод коэффициентов уверенности.
16) Приведите примеры расчета коэффициентов уверенности логического заключения при различных логических связях $(\wedge, \vee)$ между фактов в условной части правила.
17) Расскажите об отличии теории свидетельств от Байесовского подхода и метода коэффициентов уверенности.
18) Представьте и опишите геометрическую интерпретацию распределения уверенности с закрепленными массами уверенности жестко и с неизвестными массами уверенности.
19) Запишите функцию и свойства распределения уверенности теории Демпстера-Шейфера.
20) Дайте характеристику согласованному распределению уверенности и возможности.
21) Определите понятие «нечеткое» множество.
22) На чем основывается логика человеческих рассуждений?
23) Расскажите о заслугах Л. Заде в разработке общей теории n-местных логик.

24) Опишите S и π — функции принадлежности (математически и графически).

25) Определите понятие «множество нечетких подмножеств» и его свойство и сравните с множеством четких подмножеств.

26) Сформулируйте простейшие операции над нечеткими подмножествами.

27) Рассмотрите расчетные формулы расстояний для нечетких подмножеств.

28) Опишите понятие «нечеткое отношение» и приведите пример расчета проекций нечетких отношений.

29) Сформулируйте композицию двух нечетких отношений и расчете max-min композиции.

30) Приведите примеры приближенных рассуждений на основе modus ponens и обобщенного modus ponens.

31) Почему мы можем получить из одной посылки A? различные выводы в обобщенном modus ponens?

32) Определите понятие «лингвистическая переменная» и приведите пример.

33) Приведите пример модификатора термина или комбинации терминов. В каких случаях возникает нечеткое описание задачи?

Список литературы

[1] Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / В. Н. Вагин [и др.] ; под ред. В. Н. Вагина и Д. А. Поспелова. — М. : Физматлит, 2004. — 704 с.

[2] Заде Д. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Д. А. Заде. — М. : Мир, 1976. — 168 с.

[3] Бондарев В. Н. Искусственный интеллект: учеб. пособие для вузов / В. Н. Бондарев, Ф. Г. Аде. — Севастополь: Изд-во севНТУ, 2002. — 615 с.

[4] Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств : пер. с франц. / А. Кофман. — М., Радио и связь, 1982. — 432 с.

[5] Левин Р. Практическое введение в технологию искусственного интеллекта и экспертных систем с иллюстрацией на Бейсике : пер. с англ. / Р. Левин, Д. Дранг, Б. Эдельсон. — М. : Финансы и статистика, 1991. — 239 с.

[6] Нариньяни А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. — 1986. — №5. — С. 3–28.

[7] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Наука, 1986. — 369 с.

[8] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин [и др.] ; под ред. Д. А. Поспелова. — М. : Наука, 1986. — 312 с.

[9] Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов [и др.]. — М.: Радио и связь, 1989. — 304 с.

[10] Представление и исследование знаний : пер. с япон. / Х. Уэно [и др.] ; под ред. Х. Уэно, М. Исудзука. — М. : Мир, 1989. — 220 с.

[11] Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости [электронный ресурс] / А. П. Рыжов. — М. : Диалог — МГУ, 1998. — Режим доступа: ryjov@mech.math.msu.su.

[12] Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [электронный ресурс] / Д. С. Штовба. — Режим доступа: http://www.matlab.ru/fuzzylogic/book1/index.asp.

[13] Яхъяева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети : учеб. пособие / Г. Э. Яхъяева. — М. : Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лабораторные знания, 2006. — 316 с.

[14] Shafer G. A. Mathematical Theory of Tvidence / G. A. Shafer. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1976. — 297 p.